DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 5 — 2002-2003

---

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (2x + y, 2z - y, x + z).$$
   a) Écrire la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
   b) Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$, $v_3 = (3, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   c) Écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
   d) Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbf{K})$ et soit $f\colon M_2(\mathbf{K}) \to M_2(\mathbf{K})$ l'application définie par $f(A) = MA$ pour toute matrice $A \in M_2(\mathbf{K})$.
   a) Montrer que f est une application linéaire. Pour quelles matrices M est-elle injective ?
   b) Écrire la matrice de f dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
   c) Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

3. a) Montrer que
$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$
   est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et montrer que $(1, t, \ldots, t^n)$ est une base de $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$.

   b) Soit $D\colon \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire qui à tout $f \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ associe sa derivée $f' = \frac{d}{dt} f \in \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$. Écrire la matrice A_{diff} de D dans les bases canoniques $(1, t, \ldots, t^n)$ et $(1, t, \ldots, t^{n-1})$ de $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$.

   c) Soit $I\colon \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $I(f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Écrire la matrice A_{int} de I dans les bases canoniques de $\mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$.

   d) Vérifier que $A_{\text{int}}\, A_{\text{diff}} = I_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ et $A_{\text{diff}}\, A_{\text{int}} = I_n \in M_n(\mathbb{R})$.

4. Soient E un K-espace vectoriel et $f\colon E \to E$ une application linéaire. On pose $f^0 = \mathrm{Id}$ et $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n fois). Montrer que l'on a :
   a) $\mathrm{Ker}(f^n) \subset \mathrm{Ker}(f^{n+1})$ pour tout $n \geq 0$.
   b) Si $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$ pour un $n \geq 0$, alors $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ pour tout $k \geq n$.
   c) Si $x \in \mathrm{Ker}(f^{n+1}) \setminus \mathrm{Ker}(f^n)$ pour un $n \geq 0$, alors les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^n(x)$ sont linéairement indépendants (voir feuille 4, exercice 3).

5. Soit $f\colon E \to E$ une application linéaire telle que $f^2 = 0$. Montrer que
$$2 \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim E.$$