DEUG MASS 2
MATHÉMATIQUES

Feuille d'exercices 6 | 2002-2003

---

1. Soient $f\colon E \to K$ une application linéaire et $x \in E$ un vecteur tel que $f(x) \neq 0$. On pose $Kx = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker} f \oplus Kx.$$

2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, v un vecteur de E et f un endomorphisme de E. Notons $g\colon E \to E$ l'application définie par $g(x) = f(x) - v$ pour tout $x \in E$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) = x_0$.

3. Soient λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) des valeurs propres d'un endomorphisme $f\colon E \to E$ et v_1, v_2 des vecteurs propres pour λ_1 et λ_2. Montrer que $v_1 + v_2$ n'est pas un vecteur propre de f.

4. Soient A, B, C les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ définies par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer les polynômes caractéristiques de A, B et C.
   (b) Déterminer pour chaque matrice les valeurs propres.
   (c) Trouver pour chaque matrice une base de chaque sous-espace propre.
   (d) Lesquelles des matrices sont diagonalisables ?

5. Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les vecteurs propres de A.
   (b) Trouver $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   (c) Calculer A^{100}.

6. Une petite ville américaine a une population constante de 100 000 personnes; 80 0000 votent républicain, et 20 0000 votent démocrate. Chaque année, 30 % des républicains deviennent démocrates, et 20 % des démocrates deviennent républicains. Quelle est la distribution de républicains et de démocrates après n années ? Trouver la tendance à long terme.