# DEUG MASS 2
## Mathématiques

Feuille d'exercices 7 — 2002-2003

---

1. Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de $f$ et si $P \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

2. Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un isomorphisme de $E$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $f^{-1} = Q(f)$.

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ soit $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs propres de $A$. Montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$;

   (b) $C_A(B)$ est inversible.

4. Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$ qui est diagonalisable. Montrer que si $U$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$ (c.a.d. $f(U) \subset U$), alors $U$ possède une base formée de vecteurs propres de $f$.

5. (a) Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g$ des endomorphismes de $E$ diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ et de $g$.

   (b) Soient $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ des matrices diagonalisables et telles que $AB = BA$.
   Montrer qu'il existe $P \in M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que les deux matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.