DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 8 — 2002-2003

1. Soit $E = M_n(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$ et
$$\beta\colon\ E \times E \to \mathbf{K}, \quad (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB).$$
   (a) Montrer que β est une forme bilinéaire symétrique.
   (b) Montrer que β est *non dégénérée*: si pour tout $B \in E$ on a $\beta(A, B) = 0$, alors $A = 0$.
   (c) Trouver $0 \neq A \in E$ telle que $\beta(A, A) = 0$.

2. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\beta\colon\ E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\beta(A, B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$. Montrer que β est un produit scalaire, c.à.d. $\beta(A, A) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$.

3. Soit E un espace euclidien de dimension finie et $P = P^2 \in \operatorname{End}(E)$ une projection. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   (a) P est une projection orthogonale, c.à.d. $\operatorname{Ker}P \perp \operatorname{Im}P$;
   (b) $Q := \mathrm{id}_E - P$ est une projection orthogonale;
   (c) $(x, Py) = (y, Px)$ pour tous $x, y \in E$;
   (d) $A = {}^tA$ où A désigne la matrice de P dans une base orthonormée de E;
   (e) $\|Px\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$;
   (f) $Px = \sum_{i=1}^{r} (x, b_i)\, b_i$ pour tout $x \in E$ où $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im}P$;
   (g) $\|x - Px\| = \min\limits_{y \in \operatorname{Im}P} \|x - y\|$.

4. Soit E l'espace euclidien des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$.
   (a) Montrer que pour tout $f \in E$, il existe des réels a_0, b_0 et c_0 uniques tels que:
$$\int_0^1 \left[f(x) - (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\right]^2 dx \leq \int_0^1 \left[f(x) - (a + bx + cx^2)\right]^2 dx \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$
   (b) Résoudre le problème : $\displaystyle \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \left[e^{-x} - (a + bx + cx^2)\right]^2 dx.$

5. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. On pose: $\displaystyle \beta(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx$ pour $P, Q \in E$.
   (a) Montrer que β est un produit scalaire.
   (b) Pour tout entier n, on définit le polynôme $L_n(X) = (2^n n!)^{-1} D^n (X^2 - 1)^n$ où $D = d/dx$ (les L_n sont les *polynômes de Legendre*). Expliciter L_0, L_1, L_2, L_3.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, L_n est orthogonal aux polynômes $1, X, \ldots, X^{n-1}$.
   (d) Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.
   (e) Orthonormaliser les polynômes $1, X, X^2, X^3$ selon le procédé de Gram-Schmidt et comparer le résultat avec L_0, L_1, L_2, L_3.