DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 9 — 2002-2003

---

1. Soit E un espace euclidien de dimension finie et $P \in \mathrm{End}(E)$ une projection, c.à.d. $P = P^2$. Montrer que P est une projection orthogonale (c.à.d. $\mathrm{Ker}P \perp \mathrm{Im}P$) si et seulement si $P = P^*$.

2. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique tel que $(f(x), x) = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $f = 0$.

3. Soit E un espace euclidien de dimension finie et f un endomorphisme de E. On dit que f est *normal* si l'on a $f \circ f^* = f^* \circ f$.
   (a) Montrer que f est normal si et seulement si $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$.
   (b) Soit f normal.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^* - \lambda\,\mathrm{id})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et que l'on a $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \perp \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id})$ si $\lambda \neq \mu$.
   Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})^\perp$ est stable par f.

4. Soit E un espace euclidien de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs propres de f.
   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   (a) f est symétrique et *positif*, c.à.d. $(f(x), x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
   (b) f est symétrique et $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
   (c) Il existe $g \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif, tel que $f = g^2$.
   (d) Il existe $g \in \mathrm{End}(E)$ symétrique, tel que $f = g^2$.
   (e) Il existe $h \in \mathrm{End}(E)$, tel que $f = h^* \circ h$.

5. Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   (a) f est inversible ;
   (b) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$;
   (c) f est *strictement positif* , c.à.d. $(f(x), x) > 0$ pour tout $0 \neq x \in E$.

6. Soit E un espace euclidien de dimension finie. Soit $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des isomorphismes de E et $\mathrm{O}(E) = \{f \in \mathrm{GL}(E) \mid f^* \circ f = \mathrm{id}_E\}$ le sous-groupe des isométries de E. Montrer que pour $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe des isomorphismes uniques $K, P \in \mathrm{GL}(E)$ tels que :

$$f = K \circ P; \quad K \in \mathrm{O}(E) \ \text{ et } \ P \text{ strictement positif.}$$