

MIAS 2
MATHÉMATIQUES

Samedi 22 mars 2003, 9h – 12h

*Les seuls documents autorisés sont les résumés de cours.
Toutes les réponses doivent être justifiées.*

1. (3pts + 3pts + 3pts) Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a) $(1 + e^x) y y' = e^x, \quad y(0) = 2$
- (b) $xy' + 2y - x^3 = 0, \quad y(1) = 1$
- (c) $y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

2. (2pts + 1pt + 2pts) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = |\cos t|$.

- (a) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .
- (c) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Indication : $2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$.

3. (3pts) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

Pour chacune des inclusions suivantes, démontrer qu'elle est vraie, ou donner un contre-exemple si elle peut être fausse.

- (a) $\overline{A^\circ} \subset \bar{A}$, (b) $(\bar{A})^\circ \subset A^\circ$, (c) $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$.

4. (2pts + 1pt) Soient A, B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n tels que $A \cap B = \emptyset$.

On définit

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|.$$

- (a) Montrer que $d(A, B) > 0$ si A et B sont des compacts (c.à.d. si A et B sont des sous-ensembles fermés et bornés).
- (b) Montrer par un exemple que le cas $d(A, B) = 0$ est possible en général.