MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 1 — 2003

---

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, 2π-périodique, et telle que $f \neq 0$. Montrer que :
$$\forall\, n \geq 1, \quad |a_n(f)| < a_0(f) \quad \text{et} \quad |b_n(f)| < a_0(f).$$

2. (a) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
   Montrer que $a_n(f)$ et $b_n(f) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   (b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux.
   Montrer que $n\, a_n(f)$ et $n\, b_n(f) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
   Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

   (a) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f(-t)$? (b) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = -f(t)$?

   (c) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t+\pi) = f(t)$? (d) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t+\pi) = -f(t)$?

4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

   (b) Donner les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(t) = \cos(\alpha t)$ sur $[-\pi, \pi]$.

   (a) Chercher le développement en série de Fourier de f.

   (b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:
$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2}\,; \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 2x}{\pi^2 n^2 - x^2}\,.$$

6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi]$ par $f(t) = e^{at}$ avec $a \neq 0$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$. Que vaut $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$?

7. (*Inégalité de Wirtinger*)

   Soit $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.

   Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\, dt$ et déterminer le cas d'égalité.

8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(t) = -1$ si $t \in [-\pi, 0[$ et $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi[$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

   (b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
   Vers quelle valeur converge-t-elle au point $t = 0$?