MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 10 — 2003

---

1. Calculer les intégrales triples suivantes :
   (a) $\displaystyle\iiint_D xyz\,dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ z \leq y,\ x^2+y \leq 1\}$;
   (b) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y,\ y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$;
   (c) $\displaystyle\iiint_D |x^2-y^2|\,dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z\}$;
   (d) $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

2. (a) Calculer le volume de la boule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ de rayon $a > 0$.
   (b) Trouver le volume du domaine situé entre le cylindre $x^2+y^2 = 9$ et les plans $z = 1$ et $x+z = 5$.
   (c) Trouver le volume du domaine borné par la demi-sphère $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$ vers le haut, par le plan $z = 0$ vers le bas, et par le cylindre $x^2+y^2 = 9$ sur le côté.

3. Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dans les exemples suivants :
   (a) $\omega = -xy^2\,dx + x^2y\,dy$; γ est la demi-cardioïde d'équation polaire ($a > 0$ fixé) :
   $r = a\,(1+\cos\vartheta)$, $\vartheta \in [0,\pi]$.
   (b) $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$; γ est le carré orienté de sommets consécutifs:
   $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ et $D = (1,-1)$.

4. On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
   (a) Vérifier que ω est fermée.
   (b) Calculer son intégrale sur le cercle unité.
   (c) En déduire que ω n'est pas exacte.

5. On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$.
   (a) Démontrer à l'aide du théorème de Poincaré que ω est exacte.
   (b) Expliciter une primitive F de ω.