MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 11 2003

---

1. Soit ω la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\omega = (3x^2y + 2x + y^3)\, dx + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\, dy.$$

   (a) Montrer que ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determiner les primitives de ω.

   (c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ où γ est la demi-cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos\vartheta$, ϑ allant de 0 à π.

2. Calculer l'aire du domaine plan limité par l'astroïde :

$$x(t) = a\,\cos^3 t, \quad y(t) = a\,\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (\text{où } a > 0).$$

3. Soient D le demi-disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ et γ son bord orienté. Calculer l'intégrale

$$I = \int_\gamma \omega \quad \text{où} \quad \omega = x^2y\, dx + xy(2-y)\, dy$$

   des deux façons suivantes :

   (i) Paramétrer le bord γ ; (ii) se ramener à une intégrale double.

4. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann l'intégrale double

$$I = \iint_D (2x^3 - y)\, dxdy$$

   où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad (a > 0,\ b > 0)$.