MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 2 — 2003

---

1. Determiner les solutions maximales :

   (a) $y' = y^2, \quad y(1) = 1$

   (b) $(x^2 - x)\, y' = y - 1, \quad y(2) = 2$

   (c) $y' = x^2 \cos^2 y, \quad y(0) = \pi/4$

   (d) $y' = (1 + \sin x)\, y(1 - y), \quad y(0) = 1/2$

   (e) $y' = y \,\sin x + \sin x, \quad y(0) = 1$

   (f) $y' = -y + \cos x \, e^{-2x}, \quad y(0) = 2$

   (g) $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 1$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (a) $2y' = y^2 - 1$

   (b) $y' = \sqrt{|y|}$

   (c) $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$

   (d) $y' = ay - by^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ (*équation logistique*)

3. Intégrer les équations différentielles suivantes :

   (a) $y' = y^2 + 3y - 4$ (*Riccati*)

   (b) $y' = -y + x\sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0 \geq 0$ (*Bernoulli*)

4. On considère l'équation $y' = 3\,|y|^{2/3}$. Montrer les énoncés suivants :

   (a) Pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une infinité de solutions passant par (x_0, y_0).

   (b) Si $y, \tilde{y}$ sont deux solutions telles que $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) > 0$, alors $y = \tilde{y}$ sur $[x_0, \infty[$.

5. Résoudre l'équation différentielle

$$2x(1 + x)\, y' + (1 + x)\, y = 1$$

   sur chacun des sous-intervalles de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Étudier les raccords en -1 et 0.