MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 4 — 2003

---

1. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On note A° l'intérieur et $\bar{A}$ l'adhérence de A.

   (i) Démontrer que

   (a) A° est le plus grand ouvert de E inclus dans A;

   (b) $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A;

   (c) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ et $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$.

   (ii) Montrer que pour toutes parties A, B de E, on a :

   (a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   (b) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   (c) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

   (d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

   Montrer que l'inclusion réciproque dans la propriété (b) ou (c) peut être fausse.

2. Soit (E,d) un espace métrique. Pour $x, y \in E$ on pose

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

   (a) Montrer que ρ définit une métrique sur E.

   (b) Montrer que $A \subset E$ est un ouvert par rapport à la métrique ρ si et seulement si A est un ouvert par rapport à la métrique d.

3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des sous-ensembles suivantes de $\mathbb{R}$:

   (a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

4. (*La métrique du chemin de fer*) Pour deux points $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{si } x, y \text{ et } 0=(0,0) \text{ sont sur une droite;} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon,} \end{cases}$$

   oú $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que l'application $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Décrire dans cette métrique les boules ouvertes $B_d(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r\}$ de rayon $r = 1$ et de centres $x = (0,0)$, $x = (2,0)$, $x = (\frac{3}{4}, 0)$.

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et x un point de $\mathbb{R}^n$. On appelle distance de x à la partie A le nombre réel

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

   (a) Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

   (b) Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement $x \in \bar{A}$.