MIAS 2

MATHÉMATIQUES

Feuille d'exercices 5 — 2003

---

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide tel que $\inf A = a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \in \bar{A}$, $a \notin A^\circ$.

2. Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $r > 0$. Montrer que $\bigcup_{a \in K} \bar{B}(a,r)$ est aussi un compact, où $\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\}$.

3. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes

$$\|x\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \ , & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \ , & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

   (a) Montrer que les inégalités suivantes sont vérifiées:

      (i) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \ n\,\|x\|_\infty$

      (ii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

      (iii) $\|x\|_2 \ \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

   (b) Démontrer que $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

   (c) $N_p(x) := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$ est-elle une norme dans $\mathbb{R}^n$ pour $0 < p < 1$?

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = f(x^2)\ \forall\, x \in [0,1]$.
   Montrer que f est une fonction constante.

5. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\ , & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   est-elle continue à l'origine ?

6. Reprendre l'exercice précédent avec la fonction:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

7. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par: $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$.
   Est-il possible de prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$?