MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 6 — 2003

---

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Montrer que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante si et seulement si $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents:

   (a) $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha\, f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en 0 telle que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrer que f est une application linéaire.

4. Soit $n \geq 2$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Supposons qu'il existe une fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla f(x) = g(x)\, x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

   Montrer que f est constante sur chaque sphère $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Noter que f est continue en $(0,0)$ (voir Feuille 5, Exo. 6).

   (a) Montrer que $D_v f(0,0)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est une fonction continue.

   (b) Montrer que f admet des dérivées partielles du second ordre.

   (c) Montrer que $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$.