MIAS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 7 — 2003

1. Soit $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $g(x,y) = f(y,x)$;
   (b) $g(x) = f(x,x)$;
   (c) $g(x,y) = f(y, f(x,x))$;
   (d) $g(x) = f(x, f(x,x))$.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On considère la fonction
$$\phi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x,y) := \int_{x-cy}^{x+cy} f(t)\,dt.$$
   Montrer que $D_2D_2\phi = c^2\,D_1D_1\phi$.

3. Soit $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.
   Montrer qu'il existe $g\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(x) = \langle g(x), x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer les extrema de $f\colon\ (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)\prod_{i=1}^n (1+x_i)$.

5. Soit $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)\prod_{i=1}^n x_i^2$.
   (a) Trouver le maximum de f sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire que si $y_1, \ldots, y_m$ sont des nombres réels non-négatifs, alors on a :
$$(y_1 \cdot \ldots \cdot y_m)^{1/m} \leq \frac{1}{m}\,(y_1 + \ldots + y_m).$$

6. Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions f suivantes :
   (a) $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y)^2 - (x^4 + y^4)$;
   (b) $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^6 + y^6 - 2(x^3 + y^3)$;
   (c) $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;
   (d) $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = ax^2 - 2ax + y^2 - 4a^2y, \quad$ où $a \in \mathbb{R}$;
   (e) $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = (x - z^2)\,e^{-(x^2+y^2)/2}$.

7. Trouver le point du plan $2x - y + z = 16$ le plus proche de l'origine.

8. Soit $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
   Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.