# MIAS 2
## Mathématiques

Feuille d'exercices 8 — 2003

---

1. (a) Calculer l'intégrale $\int_0^a t^2 \cos t \, dt$ en calculant la dérivée de $f(x) = \int_0^a \cos(tx)\, dt$.

   (b) Calculer l'intégrale $\int_0^a t^n e^{-t} \, dt$ en calculant la dérivée de $f(x) = \int_0^a e^{-tx}\, dt$.

2. Calculer l'intégrale $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt$ pour $x > 0$ en montrant que $f$ est dérivable et en calculant sa dérivée.

3. Soit $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

   (a) Montrer que $f$ est de classe $C^2$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

   (b) Montrer que $f$ est strictement décroissante et que l'on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. Soient $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

   (a) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ et calculer $f(0)$.

   (b) Montrer que l'on a $f' + g' = 0$.

   (c) Montrer que $f(x) + g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Montrer que $f(x)$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

   (e) En déduire l'égalité $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$.

   (a) Montrer que $f$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Prouver que $f$ satisfait l'équation différentielle $2f'(x) + x\, f(x) = 0$.

   (c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6. Soit $g\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad\;\; , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Montrer que: pour tout $y \in \mathbb{R}$, les integrales

$$f(y) = \int_0^1 g(x,y)\, dx \quad \text{et} \quad f^*(y) = \int_0^1 D_2 g(x,y)\, dx$$

   sont bien définies, la fonction $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, mais on a $f'(0) \neq f^*(0)$.