

1. Calculer les intégrales doubles suivantes :

- (a) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
- (b) $\iint_D xy dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\}$;
- (c) $\iint_D x dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y \leq 4\}$;
- (d) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (e) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé;
- (f) $\iint_D xy^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (g) $\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et strictement positive. Montrer que :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(Ax|x)} dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par :

- (a) la *cardioïde* $r = 1 + \cos \vartheta$ où $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$;
- (b) les courbes $r = 1 + \cos \vartheta$, $r = \cos \vartheta$, et les rayons $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi/2$.

4. (a) Pour $a > 0$, calculer l'aire du domaine intérieur à la lemniscate de Bernoulli

$$r = a \sqrt{\cos 2\vartheta} \text{ où } |\vartheta| \leq \pi/4 \text{ et } |\vartheta - \pi| \leq \pi/4.$$

- (b) Calculer l'aire du trèfle à 4 feuilles de $r = \cos 2\vartheta$ où $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

5. Soit D un domaine plan d'aire $A > 0$. Le *centre de gravité* de D est le point G de coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy.$$

- (a) Soient des nombres $a > 0$ et $b > 0$. Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (b) Soient des nombres a, R tels que $0 \leq a < R$ et soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R, x \geq a\}.$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité de D .