DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1

PROBABILITÉS I

Devoir à rendre le 18 Novembre

---

1. Soient les événements A et B tels que $P(A \cup B) = 0.85$, $P(A) = 0.7$ et $P(B) = 0.5$. A et B sont-ils indépendants ?

2. Sur $\Omega = \{a, b, c\}$, on définit la probabilité P et les variables aléatoires X et Y par :
$$P(\{a\}) = 1/2, \quad P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/4, \quad X = \mathbf{1}_{\{a\}} - \mathbf{1}_{\{b,c\}} \text{ et } Y = \mathbf{1}_{\{b\}} - \mathbf{1}_{\{c\}}.$$
Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $]0,1[$ et q un paramètre de $]0,1[$. On pose
$$Y = 1 + \left[\frac{\log X}{\log q}\right],$$
où pour tout nombre réel positif x, le symbole $[x]$ désigne la *partie entière de* x. Montrer que la loi de Y est une loi géométrique. Quel est son paramètre ?

4. La probabilité qu'un certain évènement ait lieu (par exemple, le crash d'un avion survolant une centrale nucléaire) est très petite, à peu près $p = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ grand. Quelle est la probabilité, que l'évènement se produise au moins une fois au cours de n survols de la centrale par l'avion ? (*Indication:* la probabilité recherchée est $\approx 63\%$)

5. Soit T une variable aléatoire non négative, que nous interprétons comme la durée de vie aléatoire d'un objet. Supposons que sa fonction de répartition F admette une densité p continue. Nous considérons les quantités suivantes:
$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &:= 1 - F(t) && \textit{fonction de survie,} \\ H(t) &:= -\log \bar{F}(t) && \textit{fonction de défaillance,} \\ r(t) &:= \frac{d}{dt}H(t) && \textit{taux de défaillance.} \end{aligned}$$
   a) Montrez que $\bar{F}(t) = P(T > t)$ et $r(t) = p(t)/\bar{F}(t)$.
   Reconstruisez la fonction de répartition à partir du taux de défaillance.
   b) Montrez que:
$$\frac{P\big(T \le t + h \mid T > t\big)}{h} \longrightarrow r(t) \quad \text{quand} \quad h \searrow 0\,.$$

6. Déterminer le taux de défaillance
   (i) pour une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, et
   (ii) pour une variable de Weibull de paramètres α et λ.
   La variable T est dite de *Weibull de paramètres* $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, si la variable T^α suit une loi exponentielle de paramètre λ.

7. Soit T une variable gamma de paramètres λ et ϑ.
Montrer que son taux de défaillance est strictement croissant, constant ou strictement décroissant, suivant que $\vartheta > 1$, $\vartheta = 1$ ou $0 < \vartheta < 1$.
(On notera que le cas $\vartheta = 1$ correspond à la loi exponentielle de paramètre λ.)