DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
Probabilités I

Feuille d'exercices 1 — 2002-2003

1. Un commerçant a reçu un envoi de trois magnétoscopes d'une certaine marque et il vérifie leur fonctionnement correct, avant de les donner aux clients. On note A_i l'événement que l'appareil i présente un défaut $(i = 1, 2, 3)$.

   a) Décrire à l'aide de A_1, A_2, A_3 et les opérations adéquates les événements:

   A: Tous les magnétoscopes sont défectueux

   B: Aucun magnétoscope n'est défectueux

   C: Au moins un magnétoscope est défectueux

   D: Exactement un magnétoscope est défectueux

   E: Au plus deux magnétoscopes sont en état de marche

   b) De combien d'événements élémentaires consistent les événements A,...,E et l'ensemble fondamental Ω ?

2. a) On rappelle que l'opération $\setminus$ est définie par $A \setminus B = A \cap B^c$ pour tous les ensembles A et B. Montrer que

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

   A-t-on

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)\,?$$

   b) Montrer que

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus D).$$

   c) On définit maintenant l'opération / par $A/B = A^c \cup B$ pour tous les ensembles A et B. Montrer que

   (i) $(A/B) \cap (B/C) \subset A/C$

   (ii) $(A/B) \cap (A/C) = A/(B \cap C)$

   (iii) $(A/B) \cap (B/A) = (A \triangle B)^c$.

3. Soit Ω un ensemble. Pour toute partie A de Ω, on rappelle que la fonction $\mathbf{1}_A$ de Ω dans $\{0, 1\}$ est définie par:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   ($\mathbf{1}_A$ s'appelle la *fonction indicatrice* de A.)

   Montrer que pour tous les ensembles A, B et C,

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B},$$
$$\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{B\cap C} + \mathbf{1}_{A\cap B\cap C}.$$

   (On remarquera que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\,\mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$.)

4. Montrer que pour deux événements A et B quelconques, on a toujours:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

5. Considérons une expérience aléatoire pour laquelle l'ensemble des événements élémentaires Ω comprend exactement trois éléments ω_1, ω_2 et ω_3. Il est par ailleurs connu qu'on a $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.7$ et $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.6$.

   Calculer la probabilité des résultats $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$ et $\{\omega_3\}$.

6. Pour deux événements A et B il est connu que

$$P(A) = 0.25 \ ; \quad P(B) = 0.45 \ ; \quad P(A \cup B) = 0.5.$$

   Calculer les probabilités:

$$P(A \cap B^c) \ ; \quad P(A^c \cap B^c) \quad \text{et} \quad P(A \Delta B).$$

7. (a) Si A_1, A_2 et A_3 sont des événements quelconques, alors

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

   (b) Avec quelle probabilité un nombre tiré au hasard dans $\{1, \ldots, 1000\}$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 ? Utiliser (a).

8. On jette trois dés non pipés.
   - Quelle est la probabilité que toutes les faces soient les mêmes ?
   - Que la somme des faces fasse onze ?
   - Qu'il y ait au moins un "6" ? Utiliser 7 (a).

9. Un daltonien a trois costumes de trois couleurs différentes. Chaque matin il choisit une veste et un pantalon. Quelle est la probabilité qu'il porte un costume assorti ?

10. Quatre cartes numérotées $1, 2, 3$ et 4 sont mélangées. Quelle est la probabilité que $0, 1, 2, 3$ ou 4 cartes soient à leur place après le mélange ?

11. Dans un jeu de cartes avec un nombre pair ($= 2n$) de cartes, se trouvent 2 jokers. Après un bon mélange, les cartes sont partagées en deux tas égaux. Quelle est la probabilité que les deux jokers se trouvent dans le même tas ?

12. Le Chevalier de Méré (1610–1685), joueur et mathématicien amateur, s'étonnait un jour devant Blaise Pascal, que, jetant simultanément trois dés, une somme résultante de 11 était observée plus souvent qu'une somme résultante de 12, bien que 11 soit produit par les combinaisons 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3, et 12 par le même nombre de combinaisons (à savoir 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4). Doit-on considérer l'observation de Méré comme "due au hasard" ou bien y-a-t-il une faute dans son raisonnement ? Justifier votre réponse.

13. Quel nombre minimum d'enfants doit comprendre une famille, pour qu'il y ait un garçon avec une probabilité de 90 % (respectivement 99 %) ?