DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
Probabilités I

Feuille d'exercices 2 — 2002-2003

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\Omega \subset \mathbb{R}$ dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le nombre
$$m(P) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega\, p_\omega\,, \quad p_\omega := P(\{\omega\}),$$
(s'il existe) s'appelle la *valeur moyenne* de P. Montrer que:
   a) si P est la loi de Poisson de paramètre λ sur $\mathbb{N}$, alors on a $m(P) = \lambda$.
   b) si P est la loi binomiale de paramètres p et n sur $\{0, \ldots, n\}$, alors $m(P) = np$.
   c) si P est la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, alors $m(P) = 1/p$.

2. Un étudiant peut répondre correctement à 18 questions sur les 20 questions d'un examen. La note 20 lui sera attribuée, si et seulement si il donne une réponse correcte à 4 questions choisies au hasard. Calculer la probabilité que l'étudiant ait la note 20.

3. 100 truites ont été capturées dans un étang, marquées et remises dans l'étang. Lorsque l'on capture ensuite 100 truites, on en trouve 7 déjà marquées. Quelle est la probabilité de ce résultat, si l'étang contient en tout n truites. Pour quel n cette probabilité est-elle maximale ?

4. A la cantine, il y a des spaghettis accompagnés de morceaux de jambon. De combien de morceaux de jambon a-t-on besoin en moyenne dans une portion, pour qu'en moyenne seulement une portion sur 100 soit sans jambon ? (On modélisera le nombre de morceaux de jambon dans une portion par une loi de Poisson.)

5. Dans un espace probabilisé, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants. Considérons une famille $(A'_i)_{i\in I}$ où, pour tout $i \in I$, $A'_i = A_i$ ou $A'_i = A_i^c$.
Alors la famille $(A'_i)_{i\in I}$ est aussi une famille indépendante.

6. Soient Ω un espace discret et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$, le nombre
$$H(P) = -\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \log p_\omega \in [0, \infty]$$
s'appelle l'*entropie* de P. (On observe que la fonction $u(x) = x \log x$, où $u(0) := 0$, est continue sur $\mathbb{R}_+$, et qu'on a $u(x) \geq x - 1$ pour tout $x \geq 0$.)
   a) Étant donné deux probabilités $P, \tilde{P}$ sur Ω, considérer $H(\tilde{P}|P) := \sum_{\omega\in\Omega} \tilde{p}_\omega \log(\tilde{p}_\omega/p_\omega)$. On vérifiera que $0 \leq H(\tilde{P}|P) \leq \infty$, et $H(\tilde{P}|P) = 0$ si et seulement si $\tilde{P} = P$.
   b) Soit $\mathrm{card}(\Omega) < \infty$. Parmi toutes les probabilités P sur Ω, montrer que la loi uniforme a l'entropie maximale.
   c) Soient $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mu \in \,]1, \infty[$. Parmi toutes les probabilités P sur Ω de valeur moyenne $m(P) = \mu$, montrer que la loi géométrique de paramètre $p = 1/\mu$ a l'entropie maximale.
   d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, n\big\}$, $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ et $\mu \in \,]0, n[$. Parmi toutes les probabilités P sur Ω avec $\sum_{\omega\in\Omega} S_n(\omega)\, p_\omega = \mu$, montrer que la loi $p_\omega := p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}$ où $p = \mu/n$, a l'entropie maximale.