DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
Probabilités I

Feuille d'exercices 3 — 2002-2003

---

1. Soient X_1, X_2 indépendantes et de lois de Poisson avec les paramètres λ_1 et λ_2 :
$$P(X_i = k) = e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2).$$
Alors on a :
   a) $X = X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   b) La loi $P(X_1 = k|X = n)$ de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ est la loi binômiale avec les paramètres $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ et n.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on ait $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, les deux propriétés sont équivalentes :
   a) X suit la loi de Poisson de paramètre λ;
   b) Pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{n}$.

3. Soient $X_1, X_2 \colon \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes telles que
$$(*) \qquad P\big(X_1 = k \,\big|\, X_1 + X_2 = n\big) = C_n^k\, 2^{-n}$$
pour tous les k, n avec $0 \leq k \leq n$.
Alors X_1 et X_2 suivent des lois de Poisson avec le même λ.
(*Indication:* Vérifier la propriété suivante et utiliser ensuite 2 :
$$\frac{P(X_1 = n \,|\, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n)} = \frac{P(X_1 = n)\,P(X_2 = 0)}{P(X_1 = n-1)\,P(X_2 = 1)} = \frac{1}{n}$$
Explication: Pour illustrer la signification de l'énoncé, supposons que l'on observe les désintégrations d'une préparation radioactive. Soit X_1 le nombre de désintégrations dans l'intervalle $[0, T]$ et X_2 leur nombre dans $[T, 2T]$. Alors l'hypothèse $(*)$ signifie que chacune des n désintégrations dans $[0, 2T]$ a lieu avec la probabilité $1/2$ dans $[0, T]$, et avec la probabilité $1/2$ dans $[T, 2T]$, indépendamment des autres désintégrations.)

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que les deux propriétés sont équivalentes :
   a) X suit une loi géométrique;
   b) $P(X > k+n \,|\, X > n) = P(X > k)$ pour tous les $n, k \in \mathbb{N}^*$ ("X est *sans mémoire*").

5. Soit X une variable aléatoire non négative avec une densité continue. Montrer que les deux propriétés sont équivalentes :
   a) X suit une loi exponentielle;
   b) X est *sans mémoire*, c.a.d. on a $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$, $\forall\, s, t \geq 0$.

   Indication: Si $\phi\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $\phi(s + t) = \phi(s)\phi(t)$ pour $s, t \geq 0$ et si ϕ n'est pas la fonction nulle, alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\phi(t) = e^{\lambda t}$ pour tous les $t \geq 0$. Appliquer ceci à $\phi(x) := \int_x^\infty p(t)\, dt$ où p est la densité de X.