DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
Probabilités I

Feuille d'exercices 4 — 2002-2003

---

1. Après une nuit de beuverie, un étudiant en probabilité veut remettre ses n CDs dans leurs pochettes respectives. Pour chaque CD mis dans sa pochette, il reçoit 1 Euro. Malheureusement, il ne peut travailler que de manière complètement arbitraire. Est-ce que le gain attendu peut lui permettre de se payer un repas à la cantine si $n = 5$, respectivement $n = 100$?

2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$, et X la variable définie par $X = -(\log U)/\lambda$, où $\lambda > 0$. Vérifier que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X est intégrable si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer qu'alors :
$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$
   (b) Déduire de (a) l'espérance d'une variable géométrique de paramètre p.

   (c) Soit X une variable aléatoire positive avec une densité continue. Montrer que :
$$X \in \mathcal{L}^1(P) \Longleftrightarrow \int_0^\infty P(X > t)\, dt < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} P(X > n) < \infty,$$
   et qu'alors :
$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)\, dt \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} P(X > n) \leq E(X) \leq \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$
   (d) Déduire de (c) l'espérance d'une variable exponentielle de paramètre λ.

4. (a) Soient les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant des lois exponentielles des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer qu'alors $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ suit aussi une loi exponentielle. Quel est son paramètre ?

   (b) Vous êtes avec votre auto devant un parking plein avec 50 places, dans lesquelle les autos sont déposées pour 60 minutes en moyenne. Vous devez maintenant vous décider : vous attendez qu'une place se libère ou vous conduisez jusqu'au prochain parking, où il est sûr qu'il y a des places libres, mais qui est éloigné de 10 minutes de votre destination.

5. (a) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle avec le paramètre constant λ. Alors $X := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ possède la densité :
$$p(x) = n\lambda\, e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}, \quad x \geq 0.$$
   Donc, pour $n > 1$, le maximum ne suit plus une loi exponentielle.

   (b) On vérifie :
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$
   Indication : Évaluer l'intégrale $\int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda x})^n]\, dx$ par changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda x}$ et utiliser ensuite la formule : $(1 - u^n)/(1 - u) = 1 + u + \ldots + u^{n-1}$.

(c) Un professeur de sport attend que ses 30 élèves changent de tenue. Les temps pour se changer sont indépendants et suivent une loi exponentielle avec une espérance de 5 minutes. Estimer après combien de minutes en moyenne le professeur pourra commencer son cours. (On a approximativement : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n$).

6. Pendant la seconde guerre mondiale, le protocole de test sanguin suivant a été développé, pour détecter à moindre coût les personnes malades parmi un grand nombre $N \gg 1$ de soldats. Au lieu de tester chaque personne séparément (N tests), les échantillons de sang de groupes de k personnes sont mélangés et analysés ensemble. Si le résultat de l'échantillon mélangé est négatif, alors les k personnes sont identifiées comme en bonne santé avec un seul test. Si le résultat est positif, alors chacune des k personnes du groupe doit être testée séparément (au total, cela fait $k+1$ tests). On suppose qu'une personne a la probabilité $p \ll 1$ d'être malade et que les personnes examinées sont malades ou saines indépendamment les unes des autres.

   a) Déterminer la probabilité, que l'échantillon mélangé de k personnes soit positif, et calculer l'espérance du nombre des tests nécessaires en fonction de N, k et p (pour celà, supposer que N est divisible par k).

   b) Montrer que la valeur de k, qui minimise le nombre de tests attendu, est approximativement $1/\sqrt{p}$. (*Indication :* Utiliser l'approximation $(1-p)^k \approx 1 - kp$ pour p petit.)