DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1

PROBABILITÉS I

Feuille d'exercices 5 2002-2003

---

1. L'intervalle $[0,1]$ est divisé en deux parties par une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$. Calculer :
   (a) la longueur moyenne de la partie de gauche ;
   (b) la longueur moyenne de la partie la plus courte.

2. Si votre colocataire bloque la salle de bains, il ne vous reste plus qu'à attendre. Par expérience, vous savez qu'en moyenne celà dure environ 20 minutes. Par ailleurs, le temps d'attente semble être sans mémoire, donc d'après feuille 3, exercice 5, on devrait utiliser une loi exponentielle.
   (a) Quelle est la probabilité que la salle de bains soit déjà libre après 10 minutes ?
   (b) Pour combien de temps devriez-vous écouter de la musique et patienter jusqu'à la prochaine tentative, afin d'être sûr que la salle de bains est réellement libre avec une certitude de 90 %?

3. On jette n fois une pièce de monnaie non pipée. Soit X le gain au cours du jeu suivant : on parie la quantité C que le prochain résultat sera "pile" et on double successivement la mise jusqu'à ce que "pile" sorte; le jeu s'arrête quand "pile" sort la $1^{\text{ière}}$ fois ou au plus tard après le $n^{\text{ième}}$ jet. Déterminer la loi et l'espérance de X.

4. Soient P, $\tilde{P}$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant des densités p et $\tilde{p}$. On appelle :
$$H(P) := -\int p(t)\log p(t)\,dt, \quad \text{resp.} \quad H(\tilde{P}|P) := \int \tilde{p}(t)\log\frac{\tilde{p}(t)}{p(t)}\,dt,$$
l'*entropie* de P, respectivement l'*entropie relative* de $\tilde{P}$ par rapport à P.
   (i) Si P est la loi uniforme sur $[a,b]$, alors on a $H(\tilde{P}|P) = \log(b-a) - H(\tilde{P})$ pour chaque $\tilde{P}$ concentré sur $[a,b]$ (c.à.d. $\tilde{p} = 0$ sur $[a,b]^c$).
   (ii) Si P est la loi exponentielle de paramètre λ, alors on a $H(\tilde{P}|P) = 1 - \log(\lambda) - H(\tilde{P})$ pour chaque $\tilde{P}$ d'espérance $1/\lambda$ et concentré sur $\mathbb{R}_+$.
   (iii) Si P est la loi gaussienne $N(m,\sigma)$, alors on a $H(\tilde{P}|P) = \log(\sqrt{2\pi\sigma^2 e}) - H(\tilde{P})$ pour chaque $\tilde{P}$ d'espérance m et variance σ^2.

5. Déduire de l'exercice précédent, les énoncés suivants :
   (a) Parmi toutes les mesures P de probabilité sur $[a,b]$ admettant une densité, la loi uniforme a l'entropie maximale.
   (b) Parmi toutes les mesures P de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ d'espérance fixée $1/\lambda$, la loi exponentielle de paramètre λ a l'entropie maximale.
   (c) Parmi toutes les mesures P de probabilité sur $\mathbb{R}$ d'espérance m et variance σ^2 fixées, la loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma)$ a l'entropie maximale.

   Indication: Montrer que comme dans le cas discret (feuille 2, exercice 6) :
   $0 \le H(\tilde{P}|P) \le \infty$, et $H(\tilde{P}|P) = 0 \Longleftrightarrow \tilde{P} = P$.

Devoir surveillé : `Samedi, 14 décembre, de 9h à 12h`
`Amphi B6 du bâtiment 1er cycle`