

DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
PROBABILITÉS I

Feuille d'exercices 6

2002-2003

1. Dans une urne, se trouvent n boules semblables, qui sont numérotées de 1 à n . On tire au hasard deux boules l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne. On note X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la deuxième.

(a) Les variables aléatoires X, Y sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer la covariance $\text{cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Pourquoi le signe négatif est-il attendu ?

Indication: Utiliser que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Estimer avec l'inégalité de Bienaymé-Chebichev la probabilité d'obtenir après 1000 jets d'un dé une somme totale au moins égale à 4000.

3. Jean-Dominique achète deux ampoules neuves : une de 60 Watts et une de 100 Watts. Selon le fabricant, la durée de vie de l'ampoule de 60 Watts suit une loi exponentielle avec une durée de vie moyenne de 200 heures. La durée de vie de l'ampoule de 100 Watts suit une loi exponentielle avec une durée de vie moyenne de 100 heures. Jean-Dominique se demande, avec quelle probabilité l'ampoule de 100 Watts fonctionnera plus longtemps que l'ampoule de 60 Watts.

Indication: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres λ et μ . Vérifier tout d'abord la formule

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} p_X(t)(1 - F_Y(t)) dt$$

où p_X désigne la densité de X et F_Y la fonction de répartition de Y . En déduire que :

$$P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

4. Deux entrepreneurs veulent se rencontrer à un certain endroit entre 20h00 et 21h00. Durant cette heure, ils arrivent de manière aléatoire et indépendamment l'un de l'autre. Aucun des deux n'est prêt à attendre plus de 10 minutes l'autre.

(i) Avec quelle probabilité le rendez-vous aura-t-il lieu ?

(ii) Combien de temps chacun doit-il être prêt à attendre l'autre, pour que la probabilité de se rencontrer soit au moins de 70% ?