DEUG MASS 2 – IUP MIAGE 1
Probabilités I

Feuille d'exercices 7 — 2002-2003

---

1. On distribue $6.022 \cdot 10^{23}$ molécules d'un gaz (c.à.d. le nombre de molécules contenu dans le volume molaire du gaz) en deux récipients, tels que chaque molécule a la même probabilité de se trouver dans l'un ou l'autre des récipients, indépendamment des autres molécules. Estimer avec l'inégalité de Bienaymé-Chebishev la probabilité pour que, dans un des deux récipients, il y ait plus de $3.011 \cdot 10^{23} \cdot (1 + 10^{-8})$ molécules.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable et deux à deux non corrélées, telles que $\frac{1}{n^2}(V(X_1) + \ldots + V(X_n)) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   On définit $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
   $$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

3. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec une densité continue. Montrer que
   $$E\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux uniformément réparties sur $[0, 1]$. Déterminer les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires: $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$, $X + Y$, $|X - Y|$, X/Y (celle-ci est-elle bien définie ?).
   Calculer — lorsqu'elles existent — l'espérance et la variance de ces variables aléatoires.

5. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (gaussienne centrée réduite) et soit $Y = e^X$.
   Déterminer la fonction de répartition, la densité et l'espérance de Y.
   Montrer en particulier que $E(Y) = e^{1/2}$.

6. Soint X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{N}(0, 1)$. Le couple (X, Y) étant considéré comme les coordonnées d'un point aléatoire du plan, on passe en coordonnées polaires: $R^2 = X^2 + Y^2$, $\tan\Theta = Y/X$.
   (a) Déterminer la loi conjointe de (R, Θ) et en déduire que R et Θ sont indépendantes.
   (b) Montrer que R^2 suit une loi exponentielle et que $\tan\Theta$ suit une loi de Cauchy.
   (c) Calculer
   $$E(R), \quad E\left(\frac{X^2}{R^2}\right), \quad E\left(\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}\right).$$