Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Chaînes de Markov et files d'attente

Examen du mercredi 11 juin 2008 durée : 2 heures

---

1. `(5 points)` Soit P un noyau de transition sur un espace E fini ou dénombrable. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité π sur E qui vérifie la condition (dite de *réversibilité*) : pour tous $x, y \in E$,

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x).$$

   (a) Montrer que π est une mesure invariante pour P.

   (b) Montrer que la chaîne de Markov de loi initiale π et de noyau de transition P vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (X_1, \ldots, X_n) \text{ a même loi que } (X_n, \ldots, X_1).$$

2. `(5 points)` Soit μ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. On définit sur l'espace d'états $E = \mathbb{N}$, le noyau K par

$$K(0,i) = \mu(i), \quad K(i+1,i) = 1.$$

   (a) Caractériser les classes de communication de K en fonction de μ. Préciser notamment quand le noyau K est irréductible.

   (b) Quels sont les états récurrents du noyau K ?

   (c) À quelle condition l'état 0 est-il récurrent positif ?

   (d) Calculer l'espérance du temps de retour en 0.

   (e) Le noyau K peut-il admettre des mesures invariantes qui ne sont pas multiples les unes des autres ?

   (f) Donner une mesure invariante (non-triviale) pour le noyau K (s'il existe une loi de probabilité invariante, donner celle-ci de préférence).

3. `(5 points)` Une chaîne de Markov à temps discret sur les états $1, 2, 3, 4, 5$ a des probabilités de transition données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les classes d'états et leur type (transitive ou récurrente, et dans ce cas récurrente positive ou nulle, apériodique ou périodique, et dans ce cas leur période).

4. `(5 points)` Soit (X_n) la chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   (a) La chaîne est-elle irréductible ?

   (b) La chaîne est-elle apériodique ?

   (c) Existe-t-il une probabilité invariante ? Est-elle unique ? Si oui, la déterminer.

   (d) Que vaut la limite, quand n tend vers l'infini, de la matrice P^n ?