

**Bachelor académique en Sciences et Ingénierie**  
**Probabilités et Statistique**

Feuille de TD n° 4

2019-20

1. Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dénombrable et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Le nombre

$$m(\mathbb{P}) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega p(\omega), \quad p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

(s'il existe) s'appelle la *valeur moyenne* de  $\mathbb{P}$ . Montrer que :

- a) si  $\mathbb{P}$  est la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  sur  $\mathbb{N}$ , alors on a  $m(\mathbb{P}) = \lambda$ .
  - b) si  $\mathbb{P}$  est la loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n$  sur  $\{0, \dots, n\}$ , alors  $m(\mathbb{P}) = np$ .
  - c) si  $\mathbb{P}$  est la loi géométrique de paramètre  $p$  sur  $\mathbb{N}^*$ , alors  $m(\mathbb{P}) = 1/p$ .
2. A la cantine, il y a des spaghettis accompagnés de morceaux de jambon. De combien de morceaux de jambon a-t-on besoin en moyenne dans une portion, pour qu'en moyenne seulement une portion sur 100 soit sans jambon ? (On modélisera le nombre de morceaux de jambon dans une portion par une loi de Poisson.)
3. (*Urne de Pólya*) Une urne contient  $r$  boules rouges et  $n$  boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec  $d$  boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire.
- (a) Trouver la probabilité pour que
    - i. La seconde boule tirée soit noire.
    - ii. La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.
  - (b) On note  $N_k$  l'événement selon lequel la  $k$ -ième boule tirée est noire. Montrer que  $\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(N_1)$ .
  - (c) Trouver la probabilité pour que la première boule soit noire, sachant que les  $k-1$  suivantes sont noires ; trouver la limite de cette probabilité lorsque  $k \rightarrow \infty$ .
4. Soit  $\Omega$  un espace dénombrable et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Pour toute probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , le nombre

$$H(\mathbb{P}) = - \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \log p(\omega) \in [0, \infty]$$

s'appelle l'*entropie* de  $\mathbb{P}$ . (On observe que la fonction  $u(x) = x \log x$ , avec  $u(0) := 0$ , est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et qu'on a  $u(x) \geq x - 1$  pour tout  $x \geq 0$ .)

- a) Étant donné deux probabilités  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  sur  $\Omega$ , considérer

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) \log(q(\omega)/p(\omega)).$$

On vérifiera que  $0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \leq \infty$ , et  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ .

- b) Soit  $\text{card}(\Omega) < \infty$ . Parmi toutes les probabilités  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$ , montrer que la loi uniforme a l'entropie maximale.
- c) Soient  $\Omega = \mathbb{N}^*$  et  $\mu \in ]1, \infty[$ . Parmi toutes les probabilités  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  de valeur moyenne  $m(\mathbb{P}) = \mu$ , montrer que la loi géométrique de paramètre  $p = 1/\mu$  a l'entropie maximale.
- d) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_1, \dots, \omega_n \in \{0, 1\}\}$ ,  $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$  et  $\mu \in ]0, n[$ . Parmi toutes les probabilités  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  avec  $\sum_{\omega \in \Omega} S_n(\omega) p(\omega) = \mu$ , montrer que la loi  $p(\omega) := p^{S_n(\omega)} (1-p)^{n-S_n(\omega)}$  où  $p = \mu/n$ , a l'entropie maximale.