

**Bachelor académique en Sciences et Ingénierie**  
Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 5

2019-20

1. On considère dans une urne quatre billets notés respectivement 110, 101, 011 et 000. On tire au sort un billet dans l'urne et on considère les trois événements

$$A_i = \{\text{le } i\text{-ième chiffre du billet tiré est } 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

- (a) Les événements  $A_1, A_2, A_3$  sont-ils indépendants deux à deux ?  
(b) Sont-ils indépendants ?
2. Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants tels que  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ .  
Montrer que les événements  $A, B$  et  $C = A \triangle B$  sont indépendants deux à deux.  
Les événements  $A, B, C$  sont-ils indépendants ?
3. Montrer que la relation d'indépendance n'est *pas* transitive.
4. Soit  $\Omega$  l'ensemble des huit issues résultant de trois jets consécutifs d'une pièce de monnaie. On considère les deux événements :  
 $A$  "la première pièce amène pile" ;  
 $B$  "pile est amené au moins deux fois".  
(a) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants, si l'on munit  $\Omega$  de l'équipartition ?  
(b) Existe-t-il une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que  $A$  et  $B$  soient  $\mathbb{P}$ -indépendants ?
5. (*Indépendance conditionnelle*)  
Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits *indépendants conditionnellement* à un événement  $C$  si  $\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | C) \mathbb{P}(B | C)$ . Montrer que  $A$  et  $B$  peuvent être indépendants, et ne plus l'être conditionnellement à un événement  $C$ .
6. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements indépendants. On suppose que l'ensemble  $I$  est partitionné en deux parties  $I_1$  et  $I_2$ . Soit  $(B_i)_{i \in I}$  la famille d'événements définis par :

$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } i \in I_1, \\ A_i^c & \text{si } i \in I_2. \end{cases}$$

Montrer que alors la famille  $(B_i)_{i \in I}$  est aussi indépendante.