

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 7

2019-20

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .
 - (a) Montrer que $\mathbb{E}[X] < \infty$ si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}\{X > n\}$ converge. Montrer qu'alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{X > n\}.$$

- (b) Dédurre l'espérance d'une variable géométrique de paramètre p .
2. Si $g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est strictement croissante, montrer que

$$\mathbb{P}\{|X| > a\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)} \quad \text{pour } a > 0.$$

3. Dans une urne, se trouvent n boules semblables, qui sont numérotées de 1 à n . On tire au hasard deux boules l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne. On note X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la deuxième.

Calculer la covariance $\text{cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Pourquoi le signe négatif est-il attendu ?

Indication : Utiliser que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Soit X une variable aléatoire. On appelle *médiane* de X tout nombre M vérifiant :

$$\mathbb{P}\{X \leq M\} \geq \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\{X \geq M\} \geq \frac{1}{2}.$$

Montrer les assertions suivantes :

- (a) Toute variable aléatoire X admet au moins une médiane.
- (b) Soit X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{E}|X| < \infty$. Si M est une médiane de X , alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}|X - a| \geq \mathbb{E}|X - M|.$$

L'expression $\mathbb{E}|X - M|$ prend la même valeur pour toute médiane M de X ; cette valeur commune est appelée *écart médian* de X .

- (c) L'écart médian est majoré par l'écart-type.