

**Bachelor académique en Sciences et Ingénierie**  
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 3

2019-20

1. Un étudiant peut répondre correctement à 18 questions sur les 20 questions d'un examen.

Comme il s'agit d'un tirage sans remise, il faut appliquer la loi hypergéométrique:

$$\mathcal{H}(k; m, n)(\ell) = \frac{\binom{m}{\ell} \binom{n-m}{k-\ell}}{\binom{n}{k}}, \quad \ell = 0, \dots, \min(m, k).$$

La note 20 lui sera attribuée, si et seulement si il donne une réponse correcte à 4 questions choisies au hasard. Calculer la probabilité que l'étudiant ait la note 20.

La probabilité que l'étudiant ait la note 20 est donnée par

$$\mathcal{H}(4; 18, 20)(4) = \frac{\binom{18}{4} \binom{2}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{18!}{14! 4!} / \frac{20!}{16! 4!} = \frac{15 \cdot 16}{19 \cdot 20} \approx 0.63.$$

*Note.* La modélisation avec une loi binômiale donne un résultat légèrement différent. La probabilité d'une réponse correcte à une question est alors égale à  $p := 18/20$ , et la probabilité de  $\ell$  réponses correctes, étant données  $k$  questions, s'écrit comme

$$\mathcal{B}(k; p)(\ell) = \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell}.$$

La probabilité cherchée que l'étudiant ait la note 20 est donc

$$\mathcal{B}(4; p)(4) = \binom{4}{4} p^4 (1-p)^{4-4} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 \approx 0.65.$$

2. Le nombre  $n$  de poissons dans l'étang est inconnu. On effectue une première pêche de  $m$  poissons que l'on marque, puis que l'on relâche. Donc parmi les  $n$  poissons il y a  $m$  poissons marqués et  $n - m$  non-marqués. Dans la deuxième pêche on capture  $k$  truites. Soit l'événement

$A_\ell$  = "exactement  $\ell$  truites parmi les  $k$  truites sont marquées",  $\ell = 0, 1, \dots, \min(m, k)$ .

Alors on a

$$\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{\binom{m}{\ell} \binom{n-m}{k-\ell}}{\binom{n}{k}}.$$

Pour  $\ell = 7$ ,  $k = 100$  et  $m = 100$ ,

$$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{100}{7} \binom{n-100}{93}}{\binom{n}{100}} =: q_n.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{\binom{100}{7} \binom{n-100}{93} / \binom{n}{100}}{\binom{100}{7} \binom{n-101}{93} / \binom{n-1}{100}} = \frac{\binom{n-100}{93} \binom{n-1}{100}}{\binom{n-101}{93} \binom{n}{100}} \\ &= \frac{(n-100)!^2 (n-1)! 93! (n-194)! 100!}{(n-101)!^2 n! 93! (n-193)! 100!} = \frac{(n-100)^2}{n(n-193)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} q_n > q_{n-1} &\iff (n-100)^2 > n(n-193) \\ &\iff 10\,000 > 7n \\ &\iff n < \frac{10\,000}{7}. \end{aligned}$$

On trouve que  $q_n$  est maximale pour  $n = \left\lfloor \frac{10\,000}{7} \right\rfloor = 1428$ .

3. Soient les événements  $A$  et  $B$  tels que  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.85$ ,  $\mathbb{P}(A) = 0.7$  et  $\mathbb{P}(B) = 0.5$ .  
Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants. En fait, puisque

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.7 + 0.5 - 0.85 = 0.35 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

4. (a) *Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon?* On choisit l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  où

$$\Omega = \{(f, g), (f, f), (g, f), (g, g)\}$$

et  $\mathbb{P}$  est la loi uniforme. La probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(A | B) \quad \text{où } A = \{(f, g), (g, f)\} \text{ et } B = \{(f, g), (f, f), (g, f)\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

- (b) *Une famille a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon?* On cherche

$$\mathbb{P}(A | B) \quad \text{où } A = \{(f, g)\} \text{ et } B = \{(f, g), (f, f)\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{1}{2}.$$

5. Considérons les événements

$$\begin{aligned} BV &:= \text{“Bernard vient”}, \\ BV^c &:= \text{“Bernard ne vient pas”}, \\ BR &:= \text{“Bernard arrive en retard”}. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{“Bernard vient”} | \text{“Bernard arrive en retard”}) &= \mathbb{P}(BV | BR) \\ &= \frac{\mathbb{P}(BR | BV) \mathbb{P}(BV)}{\mathbb{P}(BR | BV) \mathbb{P}(BV) + \mathbb{P}(BR | BV^c) \mathbb{P}(BV^c)} \\ &= \frac{1/2 \times 2/3}{1/2 \times 2/3 + 1 \times 1/3} = 1/2. \end{aligned}$$

## 6. Appelons

$E$  l'événement "échouer 2 fois",

$A$  l'événement "la personne a révisé ses cours", et

$B$  l'événement contraire de  $A$ .

La probabilité  $\mathbb{P}(E|A)$  de "E sachant A" est  $0.2^2 = 0.04$ . La probabilité  $\mathbb{P}(E|B)$  de "E sachant B" est  $0.6^2 = 0.36$ . A priori, on suppose que la personne qui a échoué 2 fois à l'examen a correctement révisé avec une probabilité de 0.5. On a donc  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$ .

La formule de Bayes donne alors:

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|B)\mathbb{P}(B)} = \frac{0.04 \times 0.5}{0.04 \times 0.5 + 0.36 \times 0.5} = 0.1$$

Probabilité d'avoir révisé sachant que l'on a échoué 2 fois est 0.1. Probabilité de ne pas avoir révisé sachant que l'on a échoué 2 fois est 0.9. Il y a donc une probabilité de 0.9 que la personne n'ait pas révisé. Ce qu'elle dit est peu plausible!

## 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- (a) Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  tels que  $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$ . Alors, en particulier,  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$  pour tout  $k \leq n$ . On veut démontrer:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}),$$

c.à.d.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i | A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}) \quad \text{où } A_0 := \Omega.$$

On démontre cette propriété par récurrence. La formule est vraie pour  $n = 2$ :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1).$$

Supposons que la formule soit vraie au rang  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \cdot \mathbb{P}(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

- (b) Soient  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ , deux à deux disjoints, et  $\mathbb{P}(B_i) > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathbb{P}(A | B_1) = \mathbb{P}(A | B_2) = \dots = \mathbb{P}(A | B_n)$ . On note  $\alpha := \mathbb{P}(A | B_i)$ . On veut démontrer:

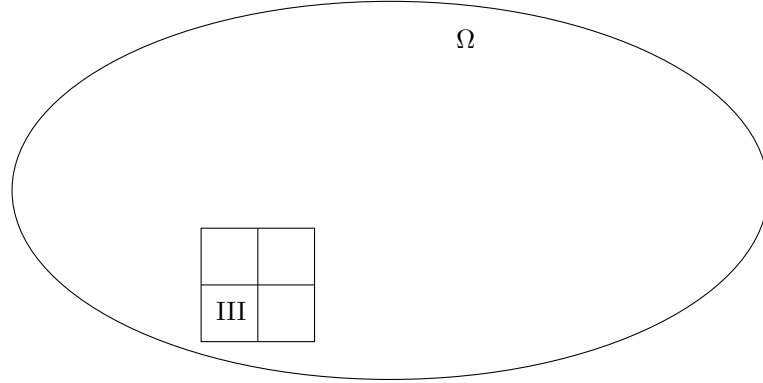
$$\mathbb{P}(A | B_1 \cup \dots \cup B_n) = \mathbb{P}(A | B_i).$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A | B_1 \cup \dots \cup B_n) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n))}{\mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n))}{\mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \alpha \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \alpha. \end{aligned}$$

8. Une fête a lieu dans les quatre salles I, II, III, IV d'un club étudiant. Une étudiante cherche un autre étudiant. Elle sait que la probabilité que cet étudiant participe à la fête est égale à  $p$ , et s'il attend, la probabilité d'être dans une certaine pièce est  $\frac{1}{4}$ .

**Solution 1.** Calculer directement



$A$  L'étudiant est à la fête:  $\mathbb{P}(A) = p$

$B_i$  L'étudiant est dans la  $i$ -ème pièce:  $\mathbb{P}(B_i | A) = \frac{1}{4}$ ,  $i = 1, \dots, 4$

(a)  $\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(B_i \cap A) = \mathbb{P}(B_i | A) \mathbb{P}(A) = \frac{p}{4}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

(b) On trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_4 | (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3))}{\mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)} = \frac{\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - \mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)} \stackrel{\text{DeMorgan}}{=} \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - (\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3))} \\ &= \frac{\frac{p}{4}}{1 - \frac{3}{4}p} = \frac{p}{4 - 3p} \end{aligned}$$

**Solution 2.** Formule de Bayes: Plus facile, en définissant les événements appropriés

$B$  L'étudiant n'est pas dans les salles I, II, III

$A_1, \dots, A_4$  L'étudiant est dans la  $i$ -ème pièce,  $i = 1, 2, 3, 4$

$A_5$  L'étudiant n'est pas à la fête du tout.

Donc:  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) et  $\bigcup_{i=1}^5 A_i = \Omega$  (événement certain)

et  $\mathbb{P}(B | A_i) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$  (parce que  $\mathbb{P}(B \cap A_i) = 0$ )

$\mathbb{P}(B | A_4) = \mathbb{P}(B | A_5) = 1$  (parce que  $A_i \subset B$  et alors  $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)$  pour  $i = 4, 5$ )

Finalement, par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(A_4 | B) = \frac{\mathbb{P}(A_4) \mathbb{P}(B | A_4)}{\sum_{i=1}^5 \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)} = \frac{\frac{p}{4} \cdot 1}{\underbrace{\frac{p}{4} \cdot 1}_{i=4} + \underbrace{1 - p}_{i=5}} = \frac{p}{4 - 3p}.$$