

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 8

2019-20

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

On pose $X_3 := X_1 X_2$. Remarquons d'abord que X_3 est une v.a. à valeurs dans $\{\pm 1\}$, et qu'on a, par indépendance des v.a. X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 X_2 = 1\} = \mathbb{P}\{(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) \text{ ou } (X_1 = -1 \text{ et } X_2 = -1)\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_2 = -1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = -1\} \mathbb{P}\{X_2 = -1\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}\{X_3 = -1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}.$$

(a) Montrons maintenant que les variables X_1, X_2, X_3 sont *indépendantes deux à deux*.

En fait,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_1 X_2 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} = \frac{1}{4}; \\ \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_1 X_2 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_2 = -1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\} \mathbb{P}\{X_2 = -1\} = \frac{1}{4}; \\ \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_1 X_2 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = -1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = -1\} = \frac{1}{4}; \\ \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_1 X_2 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_2 = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\} \mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\} \mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

ce qui démontre que X_1, X_3 sont indépendantes. De manière analogue on vérifie que X_2, X_3 sont indépendantes. Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont donc indépendantes deux à deux.

(b) Montrons maintenant que les variables X_1, X_2, X_3 *ne sont pas indépendantes*.

En fait,

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 1, X_1 X_2 = -1\} = \mathbb{P}(\emptyset) = 0;$$

mais $\mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{8}$. Donc

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1\} \neq \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \mathbb{P}\{X_3 = -1\}.$$

2. (a) Soit X_1, \dots, X_n une suite finie de v.a. indépendantes et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une suite finie de fonctions mesurables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour vérifier que les variables

$$\varphi_1 \circ X_1, \dots, \varphi_n \circ X_n$$

sont indépendantes, fixons y_1, \dots, y_n dans \mathbb{R} . On pose $A_1 = \varphi_1^{-1}\{y_1\}, \dots, A_n = \varphi_n^{-1}\{y_n\}$. Comme les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in A_n\},$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\varphi_1 \circ X_1 = y_1, \dots, \varphi_n \circ X_n = y_n\} &= \mathbb{P}\{\varphi_1(X_1) = y_1, \dots, \varphi_n(X_n) = y_n\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \in \varphi_1^{-1}\{y_1\}, \dots, X_n \in \varphi_n^{-1}\{y_n\}\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in A_n\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \in \varphi_1^{-1}\{y_1\}\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in \varphi_n^{-1}\{y_n\}\} \\ &= \mathbb{P}\{\varphi_1 \circ X_1 = y_1\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{\varphi_n \circ X_n = y_n\}. \end{aligned}$$

- (b) Soient X_1, \dots, X_n indépendantes telles que $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On veut montrer que $\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n |X_i| \right] < \infty$, et qu'alors $\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n X_i \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$.

En fait,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n |X_i| \right] &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)} |x_1 \cdot \dots \cdot x_n| \mathbb{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)} |x_1| \cdot \dots \cdot |x_n| \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n = x_n\} \\ &= \left(\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} |x_1| \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x_n \in X_n(\Omega)} |x_n| \mathbb{P}\{X_n = x_n\} \right) \\ &= \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] < \infty. \end{aligned}$$

Le même calcul sans les modules $| \cdot |$ est alors licite et conduit à l'égalité :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n X_i \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

- (c) Évidemment, si $\varphi \circ X$ est constante p.s. (p.s. abrège "presque sûrement"), disons $\varphi \circ X = c \in \mathbb{R}$ p.s., alors X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes :

$$\mathbb{P}\{X \in A \text{ et } \varphi \circ X \in B\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{X \in A\}, & \text{si } c \in B \\ 0, & \text{si } c \notin B \end{cases} = \mathbb{P}\{X \in A\} \cdot \mathbb{P}\{\varphi \circ X \in B\}.$$

Réciproquement, supposons que X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes, alors à cause de (a), $\varphi \circ X$ et $\varphi \circ X$ sont aussi indépendantes, c.à.d. $\varphi \circ X$ est indépendante d'elle-même. Donc

$$\mathbb{P}\{\varphi \circ X \leq \alpha\} = \mathbb{P}(\{\varphi \circ X \leq \alpha\} \cap \{\varphi \circ X \leq \alpha\}) = (\mathbb{P}\{\varphi \circ X \leq \alpha\})^2,$$

et par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\{\varphi \circ X \leq \alpha\} \in \{0, 1\}.$$

D'où l'on peut conclure avec le Lemme suivant :

Lemme Une v.a. réelle Y est constante p.s. si et seulement si

$$\mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} \in \{0, 1\}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve La condition est trivialement nécessaire. Soit maintenant Y une v.a. telle que $\mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} \in \{0, 1\}$ pour tout α . Alors :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} = 1 \quad \text{et} \quad \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\{Y \leq \beta\} = 0.$$

En effet, quand $n \rightarrow \infty$, on a (voir exercice 5; TD 1) :

$$\begin{aligned} \{Y \leq n\} \uparrow \Omega, \quad \text{et donc } \{0, 1\} \ni \mathbb{P}\{Y \leq n\} \uparrow \mathbb{P}(\Omega) = 1; \\ \{Y \geq -n\} \downarrow \emptyset, \quad \text{et donc } \{0, 1\} \ni \mathbb{P}\{Y \geq -n\} \downarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\alpha_0 := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} = 1\}.$$

Comme $\{Y \leq \alpha_0 + \frac{1}{n}\} \downarrow \{Y \leq \alpha_0\}$ et $\{Y \leq \alpha_0 - \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y < \alpha_0\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0 + \frac{1}{n}\} = 1, \quad \text{et} \\ \mathbb{P}\{Y < \alpha_0\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0 - \frac{1}{n}\} = 0, \end{aligned}$$

et par conséquent, $\mathbb{P}\{Y = \alpha_0\} = \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0\} - \mathbb{P}\{Y < \alpha_0\} = 1$, c.à.d. $Y = \alpha_0$ p.s.

(d) Soient X_1, \dots, X_n indépendantes. Alors $X_1 + \dots + X_n$ est constante p.s. si et seulement si toute X_i est constante p.s.

Il suffit de montrer que sous l'hypothèse $X_1 + \dots + X_n = c \in \mathbb{R}$ p.s., chaque X_i est constante p.s. (on peut se ramener au cas $i = 1$). D'abord on note que si X_1, \dots, X_n sont indépendantes, qu'alors aussi X_1 et $X_2 + \dots + X_n$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 = a, X_2 + \dots + X_n = b\} &= \sum_{\substack{x_2, \dots, x_n : \\ x_2 + \dots + x_n = b}} \mathbb{P}\{X_1 = a, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} \\ &= \sum_{\substack{x_2, \dots, x_n : \\ x_2 + \dots + x_n = b}} \mathbb{P}\{X_1 = a\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = a\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 + \dots + X_n = b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'après la partie (a), en notant $c = X_1 + \dots + X_n \in \mathbb{R}$ p.s., on déduit que aussi

$$X_1 \quad \text{et} \quad c - (X_2 + \dots + X_n)$$

sont indépendantes. Lorsque $c - (X_2 + \dots + X_n) = X_1$ p.s., la v.a. X_1 est indépendante d'elle-même. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\}^2, \quad \text{et donc } \mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\} \in \{0, 1\}.$$

D'après le Lemme dans (c), la variable X_1 est une constante p.s.

3. Soient X_1, X_2 indépendantes et de lois de Poisson avec les paramètres λ_1 et λ_2 :

$$\mathbb{P}\{X_i = k\} = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2).$$

a) Soit $X = X_1 + X_2$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = k\} &= \mathbb{P}\{X_1 + X_2 = k\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 = j, X_2 = k - j, \quad j = 0, 1, \dots, k\} \\
&= \sum_{j=0}^k \mathbb{P}\{X_1 = j, X_2 = k - j\} \\
&= \sum_{j=0}^k \mathbb{P}\{X_1 = j\} \mathbb{P}\{X_2 = k - j\} \\
&= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j! (k-j)!} \frac{\lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on utilise qu'avec $x := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ et $y := \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j! (k-j)!} \frac{\lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k} &= \sum_{j=0}^k C_k^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^j \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^k C_k^j x^j y^{k-j} = (x + y)^k = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion $X_1 + X_2$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$.

b) Pour la loi de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ on trouve, pour $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = k \mid X = n\} &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k, X = n\}}{\mathbb{P}\{X = n\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k, X_2 = n - k\}}{\mathbb{P}\{X = n\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \\
&= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } p := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

La loi de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ est donc binômiale de paramètres $p := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ et n .

4. Soient $X_1, X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ des v.a. indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n\} = C_n^k 2^{-n}$$

pour tous les k, n avec $0 \leq k \leq n$.

On rappelle que $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Donc $C_n^n = 1$, $C_n^{n-1} = n$ et on obtient

$$\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n \mid X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1 \mid X_1 + X_2 = n\}} = \frac{C_n^n 2^{-n}}{C_n^{n-1} 2^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

D'autre part, à cause de l'indépendance de X_1 et X_2 , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n \mid X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1 \mid X_1 + X_2 = n\}} &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n, X_1 + X_2 = n\}/\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1, X_1 + X_2 = n\}/\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n, X_2 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1, X_2 = 1\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n\} \mathbb{P}\{X_2 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\}}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1\}} = \frac{\lambda}{n} \quad \text{où } \lambda := \frac{\mathbb{P}\{X_2 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_2 = 0\}}.$$

En utilisant l'exercice 3 (feuille 5), la variable X_1 suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda := \mathbb{P}\{X_2 = 1\}/\mathbb{P}\{X_2 = 0\}.$$

De manière analogue, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n \mid X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n - 1 \mid X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n - 1 \mid X_1 + X_2 = n\}} = \frac{C_n^0 2^{-n}}{C_n^1 2^{-n}} = \frac{1}{n},$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n \mid X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n - 1 \mid X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_2 = n\} \mathbb{P}\{X_1 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n - 1\} \mathbb{P}\{X_1 = 1\}}.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n - 1\}} = \frac{\lambda'}{n} \quad \text{où } \lambda' := \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_1 = 0\}}.$$

Le résultat de l'exercice 3 (feuille 5) permet de conclure que la variable X_2 suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda' := \mathbb{P}\{X_1 = 1\}/\mathbb{P}\{X_1 = 0\}.$$

Finalement, lorsque X_1 est de Poisson de paramètre λ , on a :

$$\lambda' = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_1 = 0\}} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^1 / 1!}{e^{-\lambda} \lambda^0 / 0!} = \lambda.$$