

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Feuille de TD n° 2

2020

1. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha t^2(1-t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- (a) Quelle est la valeur de α ?
 - (b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
 - (c) Déterminer l'espérance et la variance de X .
 - (d) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\{X > 1/2\}$.
2. (*Loi uniforme*) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de X^2 par sa fonction de répartition. Calculer la densité de cette loi.
3. (*On coupe l'intervalle $[0, 1]$*) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Elle détermine deux intervalles $[0, X]$ et $[X, 1]$.
- (a) Quelle est la probabilité pour que le plus grand ait une longueur supérieur à $\frac{3}{4}$?
 - (b) Détermine les lois de $Y = \max\{X, 1 - X\}$ et de $Z = \min\{X, 1 - X\}$.
Montrer qu'elles admettent des densités et calculer ces densités.
 - (c) Calculer la longueur moyenne de l'intervalle de gauche.
 - (d) Calculer la longueur moyenne de l'intervalle le plus court.
4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1]$.
- (a) Soit q un paramètre de $]0, 1[$. On pose

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\log U}{\log q} \right\rfloor,$$

où pour tout nombre réel positif x , le symbole $[x]$ désigne la *partie entière* de x .
Montrer que la loi de X est une loi géométrique.

- (b) Soient $\alpha > 0$ et X la variable définie par $X = -(\log U)/\alpha$. Vérifier que X suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.
5. Soient \mathbb{P}, \mathbb{Q} des mesures de probabilité sur \mathbb{R} admettant des densités p et q , c.à.d.

$$\mathbb{P}(B) = \int_B p(t) dt, \quad \mathbb{Q}(B) = \int_B q(t) dt, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On appelle :

$$H(\mathbb{P}) := - \int p(t) \log p(t) dt, \quad \text{resp.} \quad H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \int q(t) \log \frac{q(t)}{p(t)} dt,$$

l'*entropie* de \mathbb{P} , respectivement l'*entropie relative* de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} .

Vérifier les énoncés suivants :

- (a) Parmi toutes les mesures \mathbb{P} de probabilité sur $[a, b]$ admettant une densité, la loi uniforme a l'entropie maximale.
- (b) Parmi toutes les mesures \mathbb{P} de probabilité sur \mathbb{R}_+ d'espérance fixée $1/\alpha$, la loi exponentielle de paramètre α a l'entropie maximale.
- (c) Parmi toutes les mesures \mathbb{P} de probabilité sur \mathbb{R} d'espérance μ et variance σ^2 fixées, la loi gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$ a l'entropie maximale.

Indication. Montrer que $0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \leq \infty$, et $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0 \iff \mathbb{Q} = \mathbb{P}$.