

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

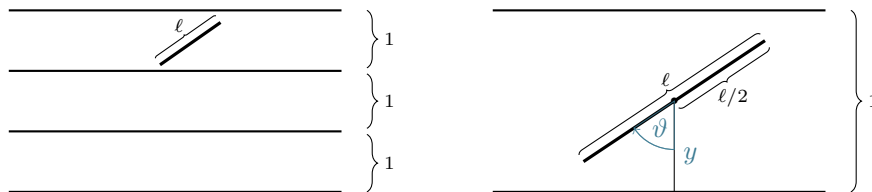
Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD 4

2020

1. Le problème de l'aiguille de Buffon (1777)

Un plan est strié de droites parallèles espacées d'une distance 1.



On lance au hasard une aiguille de longueur $\ell < 1$. Avec quelle probabilité l'aiguille coupe-t-elle une des droites?

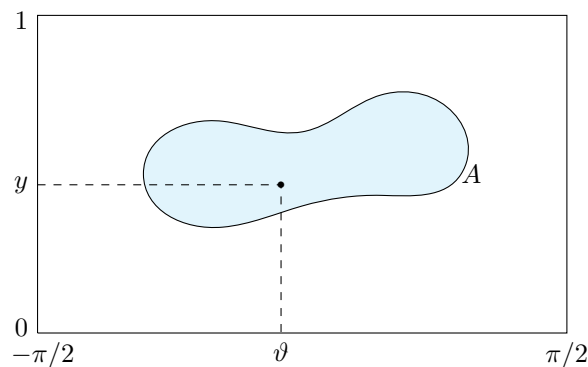
La position de l'aiguille est donnée par les coordonnées

$$Y = y, \Theta = \vartheta \quad (y \in [0, 1[, \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2[).$$

Hypothèse Y est une variable uniforme sur $[0, 1[$;
 Θ est une variable uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2[$;
 Y et Θ sont indépendantes.

Pour toute partie mesurable A de $[-\pi/2, \pi/2[\times [0, 1[$:

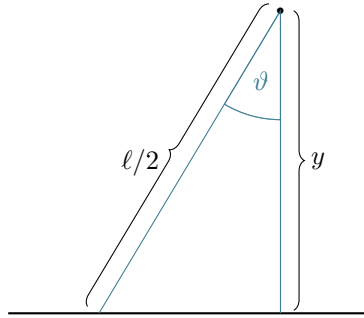
$$\mathbb{P}\{(\Theta, Y) \in A\} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{1}_A(\vartheta, y) d\vartheta dy = \frac{1}{\pi} \text{l'aire de } A.$$



Une aiguille des coordonnées $Y = y, \Theta = \vartheta$ coupe

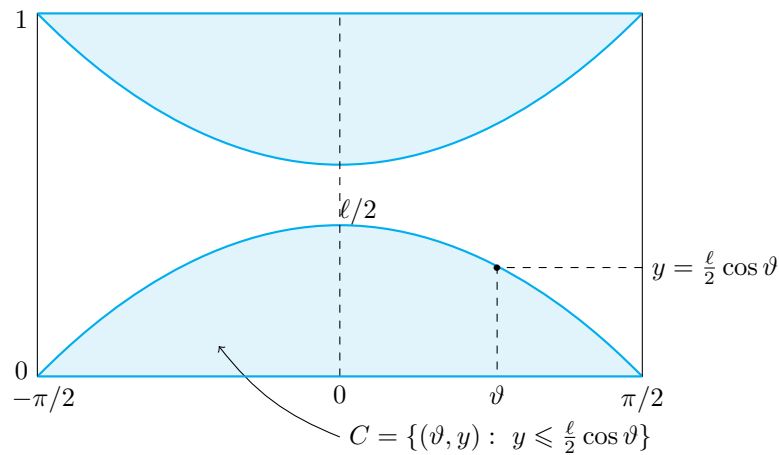
la droite en bas, si $y \leq \frac{\ell}{2} \cos \vartheta$, et

la droite en haut, si $1 - y \leq \frac{\ell}{2} \cos \vartheta$.



Donc, on obtient que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{\text{l'aiguille coupe une des droites}\} &= 2 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{1}_{\{y \leq \frac{\ell}{2} \cos \vartheta\}}(\vartheta, y) d\vartheta dy \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \cos \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{\ell}{\pi} \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi}.
 \end{aligned}$$



2. Soit X le temps d'attente jusqu'à ce que la salle de bains soit libre. Alors X suit une loi exponentielle de paramètre α . Pour trouver α , on remarque que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha} = 20 \text{ min},$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{20}.$$

Alors

$$\mathbb{P}\{X \leq t\} = \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds = -e^{-\alpha s} \Big|_0^t = 1 - e^{-\alpha t}$$

- (a) Quelle est la probabilité que la salle de bains soit déjà libre après 10 minutes?

$$\mathbb{P}\{X \leq 10\} = 1 - e^{-10/20} = 1 - e^{-0.5} \approx 0.39$$

- (b) Combien de temps faut-il attendre, afin d'être sûr que la salle de bains est réellement libre avec une certitude de 90 %?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \leq T\} = 1 - e^{-T/20} \geq 0.9 &\iff e^{-T/20} \leq 0.1 \\ &\iff -T/20 \leq \log 0.1 \\ &\iff T \geq -20 \log 0.1 \approx 46.05\end{aligned}$$

Par conséquent, on doit attendre environ 46 minutes (au moins!).

3. Soient X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes de même loi. On note

$$F(t) := \mathbb{P}\{X_i \leq t\}$$

la fonction de répartition (indépendante de i). On pose

$$M_* := \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{et} \quad M^* := \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

- (a) On cherche les fonctions de répartition de M_* et M^* .

D'abord, en utilisant l'indépendance de X_1, \dots, X_n , on remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* > t\} &= \mathbb{P}\{X_1 > t, \dots, X_n > t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 > t\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n > t\} \\ &= (1 - F(t))^n,\end{aligned}$$

d'où

$$F_{M_*}(t) := \mathbb{P}\{M_* \leq t\} = 1 - (1 - F(t))^n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}F_{M^*}(t) &:= \mathbb{P}\{M^* \leq t\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \leq t\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{X_n \leq t\} = F(t)^n.\end{aligned}$$

- (b) Supposons que

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

avec la densité $f = f_{X_i}$ de X_i (indépendante de i). Alors on trouve pour la densité f_{M_*} de M_* que

$$\begin{aligned}f_{M_*}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbb{P}\{M_* \leq t\} = \frac{d}{dt} [1 - (1 - F(t))^n] \\ &= n (1 - F(t))^{n-1} f(t) \\ &= n \left(1 - \int_{-\infty}^t f(s) ds \right)^{n-1} f(t).\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}f_{M^*}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbb{P}\{M^* \leq t\} = \frac{d}{dt} F(t)^n \\ &= n F(t)^{n-1} f(t) \\ &= n \left(\int_{-\infty}^t f(s) ds \right)^{n-1} f(t).\end{aligned}$$

(c) On trouve que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* \leq x, M^* \leq y\} &= \mathbb{P}\{M^* \leq y\} - \mathbb{P}\{M_* > x, M^* \leq y\} \\ &= F(y)^n - \mathbb{P}\{M_* > x, M^* \leq y\}.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* > x, M^* \leq y\} &= \mathbb{P}\{X_i > x, X_i \leq y, \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \begin{cases} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{x < X_i \leq y\}, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{si } x > y \end{cases} \\ &= \begin{cases} (F(y) - F(x))^n, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{si } x > y, \end{cases}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{M_* \leq x, M^* \leq y\} = \begin{cases} F(y)^n - (F(y) - F(x))^n, & \text{si } x \leq y \\ F(y)^n, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

4. Soit X une v.a. à valeurs réelles suivant la *loi de Cauchy* de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X| &= \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty,\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{x}{1+x^2} \geq \begin{cases} 0 & \text{pour } x \geq 0, \\ \frac{1}{2x} & \text{pour } x > 1. \end{cases}$$

Par suite l'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas.

(b) Soit U une v.a. uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On pose $X = \tan U$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) &= \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{U \leq \arctan x\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x;\end{aligned}$$

d'où, en dérivant,

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc $X = \tan U$ suit la loi de Cauchy.

(c) Si X suit une loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.

On pose $X^* = 1/\tan U$. Pour tout $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} F_{X^*}(x) &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{\tan U} \leq x\right\} = \mathbb{P}\left\{\tan U \geq \frac{1}{x}\right\} = \mathbb{P}\left\{U \geq \arctan \frac{1}{x}\right\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left\{U \leq \arctan \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\forall x \neq 0, \quad f_{X^*}(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{\tan U} \leq x\right\} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On obtient que $1/\tan U$ suit la même loi que $\tan U$. Il en résulte que si X suit la loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.

5. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, \infty[$ est dite *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) (où μ réel, $\sigma > 0$) si

$$Y = \log X \quad \text{est } N(\mu, \sigma^2),$$

c.à.d. si

$$U := \frac{\log X - \mu}{\sigma} \quad \text{est } N(0, 1).$$

(a) Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{\log X \leq \log x\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{\log X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{U \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log x - \mu}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

c.à.d. la densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x).$$

(b) Comme la variable $U = \frac{\log X - \mu}{\sigma}$ est $N(0, 1)$, on a

$$X = e^{\sigma U + \mu} \quad \text{avec } U \sim N(0, 1).$$

Donc on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma u + \mu} f_U(u) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma u + \mu} e^{-u^2/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + \mu} du \\
&= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}} du = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},
\end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

De la même façon,

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} (e^{\sigma u + \mu})^2 f_U(u) du = \int_{\mathbb{R}} e^{2\sigma u + 2\mu} f_U(u) du = e^{2\mu + 2\sigma^2},$$

et donc

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

(c) On a $\log X^r = r \log X$, où $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$, et donc

$$\log X^r \sim N(r\mu, r^2\sigma^2).$$

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $N(0, 1)$. On a

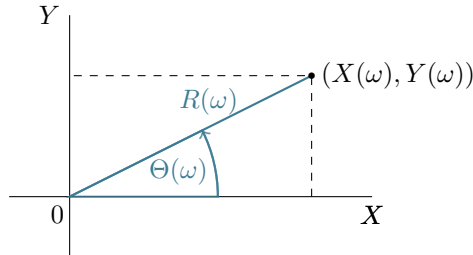
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

et parce que X et Y sont indépendantes, le couple (X, Y) a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2}.$$

(a) On cherche la densité $f_{(R,\Theta)}$ du couple (R, Θ) où

$$R := \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \tan \Theta = \frac{Y}{X}.$$



Rappel (Coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2) On écrit $x = r \cos \vartheta$ et $y = r \sin \vartheta$ avec $r > 0$ et $\vartheta \in [-\pi, \pi[$. Alors

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = r^2 \\ \frac{y}{x} &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \tan \vartheta, \end{aligned}$$

et l'on a la formule

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi]} \varphi(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr d\vartheta.$$

Pour toute fonction bornée continue ϕ sur $]0, \infty[\times [-\pi, \pi[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(R, \Theta)] &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \phi(r, \vartheta) f_{(R, \Theta)}(r, \vartheta) dr d\vartheta \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \theta(x, y)\right) f_{(X, Y)}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \phi(r, \vartheta) f_{(X, Y)}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr d\vartheta \\ &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \phi(r, \vartheta) \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\vartheta \end{aligned}$$

On déduit que

$$f_{(R, \Theta)}(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r, \quad (r, \vartheta) \in]0, \infty[\times [-\pi, \pi[,$$

et d'où

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\pi}^\pi f_{(R, \Theta)}(r, \vartheta) d\vartheta = \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r d\vartheta \\ &= e^{-r^2/2} r, \quad r \in]0, \infty[, \\ f_\Theta(\vartheta) &= \int_0^\infty f_{(R, \Theta)}(r, \vartheta) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr \\ &= -e^{-r^2/2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

On remarque que

$$f_{(R, \Theta)}(r, \vartheta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\vartheta), \quad (r, \vartheta) \in]0, \infty[\times [-\pi, \pi[;$$

par conséquent, les variables R et Θ sont indépendantes.

Conclusion (loi commune de R et Θ)

Pour $A := [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$ et $B := [\vartheta_1, \vartheta_2] \subset [-\pi, \pi[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{R \in A, \Theta \in B\} &= \int_A f_R(r) dr \cdot \int_B f_\Theta(\vartheta) d\vartheta \\ &= \int_{r_1}^{r_2} e^{-r^2/2} r dr \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{2\pi} d\vartheta \\ &= \left(e^{-r_2^2/2} - e^{-r_1^2/2}\right) \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2\pi}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{R > t\} &= \int_t^\infty f_R(r) dr = \int_t^\infty e^{-r^2/2} r dr \\ &= -e^{-r^2/2} \Big|_t^\infty = e^{-t^2/2}, \quad t > 0,\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{R^2 > t\} = \mathbb{P}\{R > \sqrt{t}\} = e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned}f_{R^2}(t) &= \frac{d}{dt} F_{R^2}(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{P}\{R^2 \leq t\} \\ &= \frac{d}{dt} (1 - \mathbb{P}\{R^2 > t\}) = \frac{1}{2} e^{-t/2}, \quad t > 0,\end{aligned}$$

et donc

$$f_{R^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t/2}, & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, R^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$.

D'autre part, en utilisant que Θ suit la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\tan \Theta \leq t; |\Theta| < \frac{\pi}{2}\right\} &= \mathbb{P}\left\{\Theta \leq \arctan t; |\Theta| < \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \frac{\arctan t + \frac{\pi}{2}}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\tan \Theta \leq t; \frac{\pi}{2} \leq |\Theta| < \pi\right\} &= \mathbb{P}\left\{\Theta \leq \arctan t; \frac{\pi}{2} \leq |\Theta| < \pi\right\} \\ &= \frac{\arctan t + \frac{\pi}{2}}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{\tan \Theta \leq t\} = \frac{\arctan t}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

On déduit que

$$f_{\tan \Theta}(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{P}\{\tan \Theta \leq t\} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $\tan \Theta$ suit la loi de Cauchy.

Remarque X/Y et Y/X ont évidemment même loi. Par conséquent, l'inverse d'une variable de Cauchy est encore une variable de Cauchy.

(c) 1. On obtient

$$\mathbb{E}[R] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{R > t\} dt = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Évidemment, on a

$$\mathbb{E} \left[\frac{X^2}{R^2} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{X^2}{X^2 + Y^2} \right] = \frac{1}{2},$$

car

$$\mathbb{E} \left[\frac{X^2}{X^2 + Y^2} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Y^2}{X^2 + Y^2} \right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\frac{X^2}{X^2 + Y^2} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{Y^2}{X^2 + Y^2} \right] = 1.$$

3. D'autre part, supposons que l'esperance

$$\mathbb{E} \left[\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right]$$

existe. Rappelons que

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y \\ y, & y \leq x \end{cases} \quad \text{and} \quad \max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & y \geq x. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y\}} + \frac{Y}{X} \mathbf{1}_{\{Y \leq X\}} \right] \\ &= 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y\}} \right] \\ &= 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y > 0\}} \right] + 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y < 0\}} \right] \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y > 0\}} \right] \\ &= 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{X}{Y} \leq 1 \text{ et } Y > 0 \right\}} \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{X}{Y} \leq 1 \right\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\tan \Theta) \mathbf{1}_{\{\tan \Theta \leq 1\}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\pi} \frac{t}{1+t^2} dt = -\infty. \end{aligned}$$

Pour (*) on a utilisé que

$$\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{X}{Y} \leq 1 \text{ et } Y > 0 \right\}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{X}{Y} \leq 1 \text{ et } Y < 0 \right\}} \right],$$

car (X, Y) et $(-X, -Y)$ ont même loi.

D'autre part, en utilisant que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y < 0\}} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{-X \leq -Y \text{ et } -Y < 0\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\{Y \leq X \text{ et } Y > 0\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbf{1}_{\left\{ 1 \leq \frac{X}{Y} \text{ et } Y > 0 \right\}} \right], \end{aligned}$$

on a de même façon,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right] &= 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbb{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y > 0\}} \right] + 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbb{1}_{\{X \leq Y \text{ et } Y < 0\}} \right] \\
&= 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{X}{Y} \leq 1 \text{ et } Y > 0 \right\}} \right] + 2\mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbb{1}_{\left\{ 1 \leq \frac{X}{Y} \text{ et } Y > 0 \right\}} \right] \\
&\geq 2 + \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y} \mathbb{1}_{\left\{ 1 \leq \frac{X}{Y} \right\}} \right] = +\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right)_+ \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right)_- \right] = +\infty$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)} \right]$$

n'existe pas.