

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD n° 7

2020

1. (*Surréservation (surbooking) d'un vol*) Soit n le nombre de réservations. On pose X le nombre de passagers qui se présentent lors de l'embarquement. L'expérience montre que 5 % des passagers ayant réservé ne se présentent pas. Donc X suit une loi binomiale avec des paramètres $p = 0,95$ et n inconnu. On note que

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}[X] = np = 0,95n, \\ \sigma^2 &= \text{var } X = np(1-p) \approx 0,0475n \implies \sigma = 0,2179\sqrt{n}.\end{aligned}$$

On va utiliser le théorème de la limite centrale. La compagnie aérienne accepte que dans un cas sur 50, le passager en surréservation ne pourra pas être admis à bord. D'abord on cherche $z \in \mathbb{R}$ tel que

$$F_Z(z) = \Phi(z) = 1 - \frac{1}{50} \approx 0,98$$

pour Z suivant une loi $N(0, 1)$. En utilisant la table de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite, on trouve que

$$\Phi(2,05) \approx 0,98.$$

Si Z suit la loi $N(0, 1)$, alors $Y = \mu + \sigma Z$ suit la loi $N(\mu, \sigma^2)$. Parce que le vol embarque au maximum 200 passagers, on demande que

$$\mu + 2,05\sigma \stackrel{!}{\leq} 200.$$

Par conséquent, on trouve

$$0,95n + 2,05 \times 0,2179\sqrt{n} \leq 200$$

et il est facile de vérifier que le nombre maximal de passagers est $n = 204$ (par exemple effectuer le changement de variable $t = \sqrt{n}$ et résoudre l'équation quadratique). Donc la compagnie aérienne peut accepter au maximum 204 réservations.

Remarque. En règle générale, l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale est justifiée si $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

2. (*Erreurs d'approximation*) Une urne contient 19 boules blanches et 1 boule noire. On tire 100 fois une boule avec remise. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée au maximum quatre fois?

- (a) (*exactement*) Pour un tirage *avec remise* la probabilité de l'événement que l'on tire exactement la boule noire est donnée par une loi binomiale avec les paramètres

$$p = \frac{1}{1+19} = \frac{1}{20} \quad \text{et} \quad n = 100.$$

On note X le nombre de tirages jusqu'à obtenir la boule noire. Donc

$$\mathbb{P}\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^4 \binom{100}{k} \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{100-k} = 0,4360.$$

- (b) (*approximativement avec l'approximation poissonnienne*) Par la Remarque 1.19 (2), l'espérance est donnée par

$$\lambda = 100p = 5.$$

On a approximativement

$$\mathbb{P}\{X \leq 4\} \approx \pi_\lambda \{0, 1, 2, 4\} = \sum_{k=0}^4 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx 0,4405.$$

L'erreur relative est donc

$$\frac{0,4405 - 0,4360}{0,4360} \approx 0,010 = 1\%.$$

- (c) (*approximativement avec le théorème de la limite centrale*) On pose X le nombre de boules noires parmi 100 tirages. On note que

$$\begin{aligned} \mu = \mathbb{E}[X] &= np = 100 \cdot \frac{1}{20} = 5 \\ \sigma^2 = \text{var } X &= np(1-p) = 100 \cdot \frac{1}{20} = 4,75 \cdot \frac{19}{20} \implies \sigma \approx 2,18. \end{aligned}$$

et on pose

$$X^* := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{var } X}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{de loi } N(0, 1).$$

Par le théorème de la limite centrale,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{0 \leq X \leq 4\} &\approx \mathbb{P}\left\{-\frac{\mu - \frac{1}{2}}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{4 - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi(-0,23) - \Phi(-2,52) \\ &\approx 0,4031. \end{aligned}$$

L'erreur relative est donc

$$\frac{0,4031 - 0,4360}{0,4360} \approx -0,075 = -7,5\%.$$

Remarque. La *correction de continuité* a été utilisée ci-dessus car on approche une loi *discrète* par une loi *continue*. Rappelons que pour une variable aléatoire X d'une loi discrète, on a

$$\mathbb{P}\{X = n\} = \mathbb{P}\{n < X < n + 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\{X \leq n\} = \mathbb{P}\{X < n + 1\}.$$

Mais pour une variable aléatoire Y continue, on a

$$\mathbb{P}\{Y = x\} = 0.$$

Donc la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ doit se réécrire comme

$$\mathbb{P}\left\{n - \frac{1}{2} \leq X \leq n + \frac{1}{2}\right\}.$$

Alors, dans le cas où np et $np(1-p)$ sont assez grandes (≥ 5), on fait l'approximation

$$\mathbb{P}\{X \leq x\} \approx \mathbb{P}\left\{N \leq x + \frac{1}{2}\right\},$$

où N suit une loi normale $N(np, np(1-p))$.

En général, par le théorème de la limite centrale, on peut montrer que pour tout $0 < p < 1$ et $0 \leq k \leq \ell \leq n$, on a

$$\mathcal{B}(n, p)(\{k, \dots, \ell\}) = \Phi\left(\frac{\ell + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + \varepsilon_{n,p}(k, \ell),$$

où $\varepsilon_{n,p}$ sont des termes d'erreur appropriés tels que $\varepsilon_{n,p} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En effet, les termes de correction $\pm \frac{1}{2}$ sont négligeables à cause de la continuité uniforme de Φ .

Remarque. En comparaison de l'exercice précédent, on a $np \not\geq 5$ et $np(1-p) \not\geq 5$ violant la règle (même après la correction de continuité). Dans ce cas on peut bien utiliser l'approximation poissonnienne.