Travaux pratiques Probabilités et Statistiques 1
Contrôle continu n°2
(*à rendre Vendredi 18 décembre 2020 à minuit au plus tard*)

1. `(2 points)` Soient X et Y des variables indépendantes de moyenne μ et variance σ^2. Calculer
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] \quad \text{et} \quad \operatorname{cov}(X-Y, X+Y)$$
en fonction de μ et σ.

2. `(2 points)` Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $X-Y$ est indépendant de X et de Y. Démontrer qu'alors
$$X - Y = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$$
presque sûrement. *Indication:* Calculer $\operatorname{var}(X-Y)$.

3. `(3 points)` Soit X une variable aléatoire positive définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Soit $\lambda \in (0,1)$.
   (a) Montrer que
   $$(1-\lambda)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}\left[X \cdot \mathbf{1}_{[\lambda\mathbb{E}[X],\infty)}(X)\right].$$
   (b) En déduire l'inégalité
   $$\mathbb{P}\{X \geq \lambda\mathbb{E}[X]\} \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$
   (c) Soit X une variable de Poisson de paramètre $1/2$. Démontrer que
   $$\mathbb{P}\left\{X \geq \frac{1}{4}\right\} \geq \frac{1}{12}.$$

4. `(3 points)` Soit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, \}$ et $\mathscr{P} \subset \mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres premiers. Pour un nombre réel $s > 1$ fixé, on définit la probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$
où $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Pour $p \in \mathscr{P}$, on considère les variables aléatoires $X_p \colon \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ définies par
$$X_p(n) := \mathbf{1}_{\{p|n\}}$$
(la notation $a|b$ indique que a divise b, i.e. il existe un entier K tel que $a = bK$)
   (i) Vérifier que $\mathbb{P}_s$ est une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
   (ii) Montrer que pour tout $p \in \mathscr{P}$, on a $\mathbb{P}_s\left\{X_p = 1\right\} = 1/p^s$.
   (iii) Démontrer que la famille $\left\{X_p : p \in \mathscr{P}\right\}$ est indépendante sous $\mathbb{P}_s$.
   (iv) Démontrer la formule
   $$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$
   Indication: Justifier que $\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \left\{X_p = 0\right\} = \{1\}$ et calculer $\mathbb{P}_s(\{1\})$ de deux manières différentes.