**Bachelor académique en Sciences et Ingénierie**

Probabilités et Statistique 1

Examen 1

---

1. (`5 points`) On considère dans une urne quatre billets notés respectivement 110, 101, 011 et 000. On tire au sort un billet dans l'urne et on considère les trois événements
$$A_i = \big\{\text{le } i\text{-ième chiffre du billet tiré est } 1\big\}\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$
Les événements $A_1, A_2, A_3$ sont-ils indépendants deux à deux ? Sont-ils indépendants ?

2. (`5 points`) Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
A l'aide de l'inégalité de Tchebychev-Markov, montrer que
$$\mathbb{P}\left\{X \leq \frac{\lambda}{2}\right\} \leq \frac{4}{\lambda}.$$

3. (`2+3 points`) Une variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est dite posséder la *propriété d'absence de mémoire* si, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}\{T > m + n \,|\, T > m\} = \mathbb{P}\{T > n\}\,.$$
   (a) Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1]$, alors $X$ posséde la propriété d'absence de mémoire.

   (b) Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ possédant la propriété d'absence de mémoire. Montrer qu'alors $X$ a pour loi une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   *Indication:* Pour (b), calculer $\mathbb{P}\{X = n\} = \mathbb{P}\{X > n - 1\} - \mathbb{P}\{X > n\}$.

4. (`1+1+1+2 points`) Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction
$$G_X(s) := \mathbb{E}[s^X]\,, \quad s \in [-1, 1]\,,$$
est appelée *fonction génératrice* de $X$. Montrer les conditions suivantes :

   (a) Il existe des coefficients $p_n \in [0, 1]$ tels que
$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\,, \quad s \in [-1, 1].$$
   Pourquoi la fonction $G_X$ caractérise-t-elle la loi de $X$ ?

   (b) Si $\mathbb{E}[X] < \infty$, alors on a $\mathbb{E}[X] = \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s)$.

   (c) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors la fonction génératice $G_{X+Y}$ de $X + Y$ est donnée par
$$G_{X+Y} = G_X\, G_Y\,.$$

   (d) Si la loi de $X$ est la loi binomiale de paramètres $p$ et $n$, alors
$$G_X(s) = (ps + 1 - p)^n.$$