Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Examen 2

---

1. (5 points)

   Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A, B, C \in \mathscr{A}$.

   Montrer les énoncés suivantes:

   (a) Si A, B sont indépendants, alors aussi A, B^c.

   (b) Si A, B, C sont indépendants, alors aussi $A \cup B, C$.

2. (5 points)

   Une population comporte 60 % de femmes et 40 % d'hommes. On sait par ailleurs que 10 % des hommes ont les cheveux longs et que 40 % des femmes ont les cheveux courts. Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme?

3. (5 points)

   Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi.
   Supposons que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On pose $a = \mathbb{E}[X_1]$, $b = \mathrm{var}(X_1)$ et $Z = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$.

   Calculer l'espérance et la variance de Z en fonction de a, b et n.

4. (5 points)

   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une espérance μ et une variance σ^2, on pose pour tout $n \geq 1$:

   $$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

   Soit $k > 0$. Utiliser l'inégalité de Tchebychev afin de majorer la probabilité

   $$\mathbb{P}\{|Z_n| \geq k\}.$$