Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Exercices de Théorie des ProbabilItés 2

Contrôle continu 1 (à rendre Mercredi 28 avril 2021 à minuit au plus tard)

1. `(3 points)`

   Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-(x+y)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.

   (a) Montrer que pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, les événements $\{X \leq a\}$ et $\{Y \leq b\}$ sont indépendants.

   (b) On pose $Z = \min(X, Y)$. Ecrire l'événement $\{Z \leq a\}$ en fonction des événements $\{X \leq a\}$ et $\{Y \leq a\}$.

   (c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la fonction de répartition F_Z et la densité de la variable aléatoire Z.

2. `(3 points)`

   La durée de vie d'une installation industrielle suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. En cas de panne de l'installation, une machine de secours est utilisée automatiquement et sans délai. La durée de vie de cette machine est indépendante de la durée de vie de l'installation principale et suit également une loi exponentielle de paramètre μ avec $0 < \mu \leq \lambda$.

   (a) Trouver la densité et la fonction de répartition de la durée de vie du système total.

   (b) Quelle est la fonction de répartition dans le cas particulier $\mu = \lambda$?

   (c) Sous l'hypothèse $\lambda = 2\mu$, déterminer λ tel qu'une durée de vie du système total d'au moins 1000 unités de temps est garantie avec une probabilité de 90 %.

3. `(4 points)`

   Soient X, X' des variables aléatoires indépendantes de même loi ayant pour fonction de densité f. On suppose que f est continue et que f^2 est intégrable. On considère la variable aléatoire $Y = X - X'$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}\{Y < 0\} = P\{Y > 0\} = 1/2$.

   (b) Montrer que la loi de Y admet une fonction de densité f_Y et l'exprimer en fonction de f sous forme d'une intégrale.

   (c) Montrer que f_Y est paire, bornée et atteint son maximum en un unique réel y_* (loi unimodale). Déterminer y_* et $f_Y(y_*)$.
   Indication: Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (d) On suppose que $\mathbb{E}[X]$ existe. Montrer que $\mathbb{E}[Y] = 0$ et que

   $$\mathbb{E}\big[|X - \mathbb{E}[X]|\big] \leq \mathbb{E}[|Y|] \leq 2\mathbb{E}\big[|X - \mathbb{E}[X]|\big].$$

   (e) On suppose que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$. Déterminer

   $$f_Y, \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[|Y|] \text{ et } \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$$

   en fonction de a, b.