

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistiques 2

Examen 2

1. (4 points)

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

- (a) Déterminer la loi de $|X|$ et de X^2 .
- (b) Les variables $|X|$ et X^2 admettent-elles des densités de probabilité?
- (c) Calculer l'espérance et la variance de $|X|$ et de X^2 .

2. (4 points)

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.

- (a) Pour $0 < p < 1$, déterminer la loi de la variable $X = \mathbb{1}_{\{U \leq p\}}$.
- (b) Montrer que $Z = -\ln(U)/3$ suit une loi exponentielle dont on calculera le paramètre.

3. (4 points)

Un laboratoire de physique dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit une loi sans vieillissement ("*la variable aléatoire est sans mémoire*").

- (a) Sachant que $\mathbb{P}\{X > 10\} = 0,286$, déterminer la loi de X .
- (b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
- (c) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

4. (4 points)

Votre temps de déplacement du domicile au lieu de travail suit une loi normale de moyenne 40 minutes et d'écart-type 7 minutes. Si vous voulez vous assurer avec une certitude de 95 % de ne pas être en retard pour une réunion à 13h00, quel est l'heure limite à laquelle vous devez quitter votre domicile ?

5. (4 points)

Un joueur entre dans un casino où on lui propose le jeu suivant. Il doit jouer à pile ou face avec une pièce équilibrée dix-milles fois de suite. La mise de départ est de 100 Euros. S'il obtient "face" plus de 5.150 fois il gagne deux milles Euros. Sinon il perd sa mise.

- (a) Estimer la probabilité que le joueur gagne.
- (b) Pensez-vous que ce jeu avantage le casino ou le joueur ? Quel devrait être le gain proposé par le casino pour que le jeu soit équilibré.

Voici quelques valeurs de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ calculée au moyen d'Excel :

Loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$
Probabilité que X soit inférieure à u1+u2

u1\u2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000000	0.5039894	0.5079784	0.5119665	0.5159535	0.5199389	0.5239223	0.5279032	0.5318814	0.5358565
0,1	0.5398279	0.5437954	0.5477585	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0,2	0.5792597	0.5831661	0.5870644	0.5909541	0.5948348	0.5987063	0.6025681	0.6064198	0.6102612	0.6140918
0,3	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368306	0.6405764	0.6443087	0.6480272	0.6517317
0,4	0.6554217	0.6590970	0.6627572	0.6664021	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0,5	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019441	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0,6	0.7257469	0.7290692	0.7323712	0.7356528	0.7389138	0.7421540	0.7453732	0.7485712	0.7517478	0.7549030
0,7	0.7580364	0.7611480	0.7642376	0.7673050	0.7703501	0.7733727	0.7763728	0.7793501	0.7823046	0.7852362
0,8	0.7881447	0.7910300	0.7938920	0.7967307	0.7995459	0.8023375	0.8051055	0.8078798	0.8105704	0.8132671
0,9	0.8159399	0.8185888	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1,0	0.8413447	0.8437523	0.8461358	0.8484950	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1,1	0.8643339	0.8665004	0.8686431	0.8707618	0.8728568	0.8749280	0.8769755	0.8789995	0.8809998	0.8829767
1,2	0.8849303	0.8868605	0.8887675	0.8906514	0.8925122	0.8943502	0.8961653	0.8979576	0.8997274	0.9014746
1,3	0.9031995	0.9049020	0.9065824	0.9082408	0.9098773	0.9114919	0.9130850	0.9146565	0.9162066	0.9177355
1,4	0.9192433	0.9207301	0.9221961	0.9236414	0.9250663	0.9264707	0.9278549	0.9292191	0.9305633	0.9318879
1,5	0.9331928	0.9344783	0.9357445	0.9369916	0.9382198	0.9394292	0.9406200	0.9417924	0.9429466	0.9440826
1,6	0.9452007	0.9463011	0.9473839	0.9484493	0.9494974	0.9505285	0.9515428	0.9525403	0.9535214	0.9544861
1,7	0.9554346	0.9563671	0.9572838	0.9581849	0.9590705	0.9599409	0.9607961	0.9616365	0.9624621	0.9632731
1,8	0.9640697	0.9648522	0.9656206	0.9663751	0.9671159	0.9678433	0.9685573	0.9692582	0.9699460	0.9706211
1,9	0.9712835	0.9719335	0.9725711	0.9731967	0.9738102	0.9744120	0.9750022	0.9755809	0.9761483	0.9767046
2,0	0.9772499	0.9777845	0.9783084	0.9788218	0.9793249	0.9798179	0.9803008	0.9807739	0.9812373	0.9816912
2,1	0.9821356	0.9825709	0.9829970	0.9834143	0.9838227	0.9842224	0.9846137	0.9849966	0.9853713	0.9857379
2,2	0.9860966	0.9864475	0.9867907	0.9871263	0.9874546	0.9877756	0.9880894	0.9883962	0.9886962	0.9889894
2,3	0.9892759	0.9895559	0.9898296	0.9900969	0.9903582	0.9906133	0.9908625	0.9911060	0.9913437	0.9915758
2,4	0.9918025	0.9920237	0.9922397	0.9924506	0.9926564	0.9928572	0.9930531	0.9932443	0.9934309	0.9936128
2,5	0.9937903	0.9939634	0.9941322	0.9942969	0.9944574	0.9946138	0.9947664	0.9949150	0.9950600	0.9952012
2,6	0.9953388	0.9954729	0.9956035	0.9957307	0.9958547	0.9959754	0.9960929	0.9962074	0.9963188	0.9964274
2,7	0.9965330	0.9966358	0.9967359	0.9968332	0.9969280	0.9970202	0.9971099	0.9971971	0.9972820	0.9973645
2,8	0.9974448	0.9975229	0.9975988	0.9976725	0.9977443	0.9978140	0.9978817	0.9979476	0.9980116	0.9980737
2,9	0.9981341	0.9981928	0.9982498	0.9983051	0.9983589	0.9984111	0.9984617	0.9985109	0.9985587	0.9986050
3,0	0.9986500	0.9986937	0.9987361	0.9987772	0.9988170	0.9988557	0.9988932	0.9989296	0.9989649	0.9989991
3,1	0.9990323	0.9990645	0.9990957	0.9991259	0.9991552	0.9991836	0.9992111	0.9992377	0.9992636	0.9992886
3,2	0.9993128	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994023	0.9994229	0.9994429	0.9994622	0.9994809	0.9994990
3,3	0.9995165	0.9995335	0.9995499	0.9995657	0.9995811	0.9995959	0.9996102	0.9996241	0.9996375	0.9996505
3,4	0.9996630	0.9996751	0.9996868	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997397	0.9997492	0.9997584
3,5	0.9997673	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998073	0.9998145	0.9998215	0.9998282	0.9998346
3,6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998636	0.9998688	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998878
3,7	0.9998922	0.9998963	0.9999004	0.9999042	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3,8	0.9999276	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3,9	0.9999519	0.9999538	0.9999557	0.9999575	0.9999592	0.9999609	0.9999625	0.9999640	0.9999655	0.9999669
4,0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784
4,1	0.9999793	0.9999802	0.9999810	0.9999819	0.9999826	0.9999834	0.9999841	0.9999848	0.9999854	0.9999860
4,2	0.9999866	0.9999872	0.9999878	0.9999883	0.9999888	0.9999893	0.9999898	0.9999902	0.9999906	0.9999911
4,3	0.9999915	0.9999918	0.9999922	0.9999925	0.9999929	0.9999932	0.9999935	0.9999938	0.9999941	0.9999943
4,4	0.9999946	0.9999948	0.9999951	0.9999953	0.9999955	0.9999957	0.9999959	0.9999961	0.9999963	0.9999964
4,5	0.9999966	0.9999968	0.9999969	0.9999970	0.9999972	0.9999973	0.9999974	0.9999976	0.9999977	0.9999978
4,6	0.9999979	0.9999980	0.9999981	0.9999982	0.9999983	0.9999983	0.9999984	0.9999985	0.9999986	0.9999986
4,7	0.9999987	0.9999988	0.9999988	0.9999989	0.9999989	0.9999990	0.9999990	0.9999991	0.9999991	0.9999992
4,8	0.9999992	0.9999992	0.9999993	0.9999993	0.9999993	0.9999994	0.9999994	0.9999994	0.9999995	0.9999995
4,9	0.9999995	0.9999995	0.9999996	0.9999996	0.9999996	0.9999996	0.9999996	0.9999997	0.9999997	0.9999997
5,0	0.9999997	0.9999997	0.9999997	0.9999998	0.9999998	0.9999998	0.9999998	0.9999998	0.9999998	0.9999998



Abraham de Moivre (1667-1754)



Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)



Johann Carl Friederich Gauss (1777-1855)

Exemple : $\mathbb{P}\{X \leq 1,23\} = 0,8906514$