

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Géométrie 4

Examen du mercredi 4 juillet 2007

durée : 2 heures

1. Trouver toutes les applications de $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \text{Möb}_+(\hat{\mathbb{C}}) \cup \text{Möb}_-(\hat{\mathbb{C}})$ qui fixent point par point le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 2 et qui laissent invariant $\hat{\mathbb{R}}$. Écrire ces applications sous la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ou bien} \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

2. Soit la courbe $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$c(t) = \left(\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2} \right).$$

- (a) Calculer la longueur de la courbe pour $t \in [0, 3]$.
- (b) Trouver le repère de Frénet, la courbure et la torsion.

3. Considérons la surface paramétrée

$$\varphi(u, v) = (u, v \cos u, v \sin u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Calculer les matrices correspondant à la première et à la deuxième forme fondamentale et à l'endomorphisme de Weingarten.
- (b) Trouver les courbures principales et la courbure de Gauss en un point p quelconque de $M = \varphi(\mathbb{R}^2)$.
- (c) Pour $p = \varphi(0, 0)$ trouver un vecteur unitaire $\xi \in T_p M$ tel que $k(\xi)$, la courbure normale de M en p dans la direction ξ , soit nulle.

4. Répondre aux deux questions suivantes et justifier votre réponse :

- (a) Existe-t-il une triangulation de la sphère S^2 avec 301 triangles ?
- (b) Existe-t-il une triangulation de la sphère S^2 avec 301 arêtes ?