

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistiques 4

Examen du mardi 10 juillet 2007

durée : 2 heures

1. (5 points) Le temps d'attente au téléphone dans un réseau téléphonique est sans mémoire, et l'on sait, qu'à certaines périodes de la journée, le temps d'attente moyen est de 10 minutes, si la ligne est occupée.
- (a) Avec quelle probabilité la ligne est-elle déjà libre au bout de 5 minutes ?
 - (b) Combien de temps doit-on attendre, si l'on veut avoir la ligne libre avec une certitude de 95 % ?

Modéliser à l'aide de la loi exponentielle.

2. (5 points) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$,

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X = 0\} = p,$$

et Y une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose X et Y indépendantes et on pose $Z := XY$.

- (a) Calculer $\mathbb{P}\{Z < 0\}$, $\mathbb{P}\{Z = 0\}$ et $\mathbb{P}\{0 < Z \leq x\}$ pour $x > 0$.
 - (b) En déduire la fonction de répartition de Z . La variable aléatoire Z admet-elle une densité ?
 - (c) Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
3. (5 points) Soit X une variable aléatoire continue, F_X sa fonction de répartition et f_X sa fonction densité.
- (a) Soit $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
 - i. Exprimer F_Y et f_Y en termes de F_X et f_X .
 - ii. Appliquer le résultat au cas où X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - (b) Soit $U = F_X(X)$. Démontrer que U suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$.
 - (c) Soit $V = -\log F_X(X)$. Démontrer que V suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
4. (5 points) Une pièce tombe sur pile avec la probabilité 0.6. À chaque coup, je mise 1 euro sur face.

- (a) Expliciter mon gain G_n après n parties à l'aide d'une suite de variables aléatoires i.i.d. bien choisies.
- (b) À l'aide de la Loi des Grands Nombres, estimer mon gain après 400 coups et majorer, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, la probabilité qu'il soit positif.
- (c) À l'aide du Théorème Central Limite, estimer la probabilité que mon gain après 400 coups soit positif. Comparer avec la question précédente.

Indication : $N(10/\sqrt{6}) = 0.999978$, $e^{-0.5} \approx 0.61$, $\ln 0.05 \approx -2.996$