Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Géométrie 4

Feuille de TD n° 7 — 2008

Courbes paramétrées

1. (a) Montrer que la courbure et le repère de Frénet d'une courbe plane sont des quantités géométriques.

   Autrement dit : Soient γ et γ' deux courbes planes C^2 et régulières telles que $\gamma = \gamma' \circ \varphi$ avec $\varphi' > 0$; notons (T, N) le repère de Frénet de γ et κ sa courbure, et notons (T', N') et κ' les quantités correspondantes de γ'. Alors

   $$T(t) = T'(\varphi(t)), \quad N(t) = N'(\varphi(t)), \quad \kappa(t) = \kappa'(\varphi(t)).$$

   (b) Même question pour les courbes dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe C^2 et birégulière. Montrer que γ est de torsion nulle si et seulement si sa trace est contenue dans un plan.

3. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ C^3 et birégulière. Montrer que sa courbure et sa torsion sont données par

   $$\kappa = \frac{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|^2}.$$

4. On appelle *hélice circulaire* la courbe $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

   $$\gamma(t) = \big(a\cos(\mu t),\, a\sin(\mu t),\, b\,\mu t\big),$$

   où $a, b \neq 0$ et $\mu > 0$.

   (a) Déterminer μ tel que la courbe γ soit paramétrée par longueur d'arc.

   (b) Trouver le repère de Frénet, la courbure et la torsion pour la courbe reparamétrée.