

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Géométrie 4

Examen du mercredi 11 juin 2008

durée : 2 heures

1. (5 points)

En géométrie hyperbolique un *triangle idéal* est un triangle dont les trois sommets sont à l'infini.

(a) Soient Δ et Δ' deux triangles idéaux.

Montrer qu'il existe une isométrie hyperbolique qui envoie Δ sur Δ' .

(b) Montrer que tous les triangles idéaux ont pour aire π .

2. (5 points)

(a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour un triangle sphérique $\Delta \subset S^2$ (on dit alors que Δ est *équilatéral*) :

i. les trois côtes de Δ sont égaux ;

ii. les trois angles de Δ sont égaux.

(b) Pour un triangle équilatéral, si A est la longueur des côtes, et α la mesure des angles, montrer que

$$\cos \frac{A}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Indication : Bisection du triangle Δ .

3. (5 points)

(a) Montrer que les transformations de Möbius $m \in \text{Möb}_+(\mathbb{H}^2)$ du demi-plan \mathbb{H}^2 de Poincaré qui fixent le point i peuvent se mettre sous la forme

$$z \mapsto \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}.$$

(b) Notons $R(\vartheta)$ l'isométrie ainsi définie. À quelle condition a-t-on $R(\vartheta_1) = R(\vartheta_2)$?

(c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{H}^2$, il existe une infinité d'isométries hyperboliques ayant p pour point fixe.

4. (5 points)

On souhaite étudier la courbe (E) d'équation :

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1$$

dans le plan euclidien, avec $a, b > 0$.

(a) Montrer que (E) a une paramétrisation du type :

$$\gamma(t) = (\lambda \cos t, \mu \sin t),$$

pour des valeurs de λ, μ qu'on exprimera en fonction de a et b .

(b) Calculer la vitesse de γ , son vecteur tangent unitaire et son vecteur normal unitaire.

(c) En déduire la courbure de γ en fonction de t .