M1 – Master Mathématiques de Metz

Modèles probabilistes en finance

Examen

Durée: 3 heures | 14 juin 2007

---

1. Le modèle de Black et Scholes est constitué de deux actifs :

   - un actif dit « sans risque » satisfaisant $dS_t^0 = rS_t^0\,dt$, et

   - un actif risqué qui satisfait l'équation différentielle stochastique $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t$.

   (a) Expliciter les solutions S_t^0 et S_t de ces deux équations différentielles stochastiques.

   (b) Donner l'équation de l'évolution du cours actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ du titre risqué.

   (c) Expliquer la notion d'une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, et donner l'équation de l'évolution du cours actualisé $\tilde{S}_t$ sous cette mesure $\mathbb{Q}$.

   (d) On considère une option de la forme $H = h(S_T)$ et on note F la fonction donnant le prix $F(t, S_t)$ de l'option en fonction du temps et du cours spot du sous-jacent. Montrer que si h est croissante (resp. décroissante), $F(t, x)$ est une fonction croissante (resp. décroissante) de x.

   (e) (*Option binaire*) Une option du call binaire est une option qui paye 1 si le sous-jacent S_t est à l'échéance T supérieur au prix d'exercice K, rien sinon. Donner le prix de cette option à un instant t quelconque, en utilisant les notations classiques dans la formule de Black-Scholes.

   (f) Calculer le Delta de l'option binaire.

   (g) Décrire la stratégie de portefeuille qui réplique l'option binaire.

   (h) Soit $b > 0$ une barrière haute. On considère l'option $h(S_T) = S_T\,1_{\{S_T \geq b\}}$ qui délivre l'action S_T à maturité si la barrière est traversée, et rien sinon. Montrer que cette option se décompose dans un call européen $(S_T - b)_+$ plus une partie qu'on précisera. Quelle stratégie de couverture proposez-vous ?

2. On se place dans le cadre du modèle de Black et Scholes avec un actif risqué S_t de valeur initiale $S_0 = x > 0$. On note $\tilde{S}_t$ le cours actualisé sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $G(t, x) = e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2$, et on note $M_t = G(t, \tilde{S}_t)$.

   (a) En appliquant la formule d'Itô, montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_T]$ et en déduire que pour tout réel a,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\tilde{S}_T - a)^2] = e^{\sigma^2 T}x^2 - 2ax + a^2.$$