

Licence de Mathématiques
U5a, calcul intégral et équations différentielles

Feuille de TD n° 10

2004

1. Déterminer les solutions maximales :

- (a) $y' = y^2, \quad y(1) = 1$
- (b) $(t^2 - t) y' = y - 1, \quad y(2) = 2$
- (c) $y' = t^2 \cos^2 y, \quad y(0) = \pi/4$
- (d) $y' = (1 + \sin t) y(1 - y), \quad y(0) = 1/2$
- (e) $y' = y \sin t + \sin t, \quad y(0) = 1$
- (f) $y' = -y + \cos t e^{-2t}, \quad y(0) = 2$
- (g) $y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2}, \quad y(1) = 1$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $2y' = y^2 - 1$
- (b) $y' = \sqrt{|y|}$
- (c) $y' = ay + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$
- (d) $y' = ay - by^2 \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0 \quad (\text{équation logistique})$
- (e) $y' = y^2 + 3y - 4 \quad (\text{Riccati})$
- (f) $y' = -y + t\sqrt{y}, \quad y(t_0) = y_0 \geq 0 \quad (\text{Bernoulli})$

3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs complet de classe C^1 sur U et $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ son flot, c.à.d.

$$\frac{d}{dt} \phi(t, x) = F(\phi(t, x)), \quad \phi(0, x) = x.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $\phi_t: U \rightarrow U, \phi_t(x) = \phi(t, x)$. Montrer que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

En déduire, en admettant que ϕ est de classe C^1 , que $t \mapsto \phi_t$ est un morphisme du groupe \mathbb{R} dans le groupe des difféomorphismes de U .