

**Licence de Mathématiques**  
U5a, calcul intégral et équations différentielles

Feuille de TD n° 11

2004

1. (*Condition suffisante d'existence de solutions globales*)

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. On se propose de démontrer que toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est globale si  $f$  vérifie l'hypothèse suivante :

(H) Il existe des fonctions  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que

$$\langle f(t, y), y \rangle \leq a(t) \|y\|^2 + b(t), \quad \forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

(a) Soit  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale à droite passant par un point  $(t_0, y_0)$  et soit  $r(t) = \|y(t)\|^2$ . Montrer que  $r'(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$ .

En déduire que  $\|y(t)\|^2 \leq \rho(t)$  où  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution (toujours globale) de l'équation linéaire  $\rho' = 2a(t)\rho + 2b(t)$ , telle que  $\rho(t_0) = \|y_0\|^2$ .

(b) Déterminer un majorant explicite de  $\|y(t)\|$  lorsque  $a$  et  $b$  sont des constantes.

(c) On suppose que  $t_1 < \sup I$ . Montrer que  $y(t), y'(t)$  sont bornées sur  $[t_0, t_1[$  et que ces fonctions se prolongent par continuité en  $t_1$ . Montrer que ceci conduit à une contradiction.

2. Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ . On suppose que  $J_f(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et que  $f^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . On se propose de démontrer que  $f$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Montrer que  $f$  est surjective.

(b) Pour montrer que  $f$  est injective, on considère le champ de vecteurs  $-\text{grad } F$  sur  $\mathbb{R}^n$  où  $F(x) = \|f(x)\|^2$  et on note  $\phi$  son flot. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(\phi(t, x)) = 0$ . En déduire que  $g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x)$  existe et que  $g$  est continue. Vérifier que  $\text{Im } g = f^{-1}\{0\}$  et en déduire que  $f^{-1}\{0\}$  est réduit à un point.

3. (*Réduction de l'ordre*)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On suppose que  $y_1$  est une solution de l'équation

(E) 
$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

(a) On cherche une solution de l'équation (E) sous la forme  $y(t) = y_1(t)v(t)$ . Montrer que  $v'$  doit être solution d'une équation du premier ordre.

(b) Soit  $J \subset I$  un intervalle où  $y_1$  ne s'annule pas. Sur  $J$  on pose

$$u(t) = \frac{1}{y_1(t)^2} \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Montrer que  $y_1(t)$  et  $y_2(t) = y_1(t) \int u(t) dt$  sont deux solutions indépendantes de (E) sur  $J$ .

(c) Appliquer cette procédure aux équations suivantes :

(i) *équation de Legendre*  $(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$  ( $|t| < 1$ ), avec  $y_1(t) = t$ .

(ii) *équation de Bessel*  $t^2y'' + ty' + (t^2 - 1/4)y = 0$  ( $t > 0$ ), avec  $y_1(t) = t^{-1/2} \sin t$ .

4. (*Construction de la résolvante*)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t \mapsto A(t)$  une fonction continue de  $I$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . On note  $R(t, t_0)$  la résolvante de l'équation  $y' = A(t)y$ , et on définit par récurrence la suite  $(R_n)$  de fonctions de  $I$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} R_0(t, t_0) = \text{Id} \\ R_n(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(s) R_{n-1}(s, t_0) ds. \end{cases}$$

(a) Montrer que si  $K$  est un compact de  $I$ , on a

$$\|R_n(t, t_0)\| \leq \frac{|t - t_0|^n}{n!} \left( \sup_{s \in K} \|A(s)\| \right)^n$$

(b) En déduire que  $R(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} R_n(t, t_0)$ .

5. (*Wronskien*)

(a) Soit  $t \mapsto X(t)$  une application  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  et  $W(t) := \det X(t)$ . Calculer  $W'(t)$ .

(b) On suppose que  $t \mapsto X(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est une solution de l'équation  $X' = A(t)X$ , où  $t \mapsto A(t)$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Quelle équation différentielle satisfait  $W(t)$  ?

(c) On considère maintenant l'équation différentielle scalaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . On note  $R(t, 0)$  la résolvante du système linéaire d'ordre 1 correspondant et  $W(t) = \det R(t, 0)$ . Calculer  $W(t)$  en fonction de  $a$  et  $b$ , et montrer que  $W$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .