

Licence de Mathématiques
U5a, calcul intégral et équations différentielles

Feuille de TD n° 12

2004

1. (Zéros des solutions de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

(a) Montrer que les zéros éventuels d'une solution non-nulle de (E) sont isolés.

(b) Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 la solution y_2 s'annule exactement une fois.

2. (Zéros des solutions de $y'' + q(t)y = 0$)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + q(t)y = 0.$$

(a) Pour $i = 1, 2$, on note y_i une solution non-nulle de l'équation (E_i) $y'' + q_i(t)y = 0$, où $q_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et $q_1(t) \leq q_2(t)$ pour tout $t \in I$. On pose

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

i. Montrer que W est nulle sur I si et seulement si y_1 et y_2 sont proportionnelles.

ii. Calculer W' . En déduire qu'entre deux zéros successifs de y_1 , ou bien y_2 s'annule, ou bien W est identiquement nulle.

iii. En déduire qu'entre deux zéros consécutifs d'une solution non-nulle de (E_1) toute solution de (E_2) s'annule au moins une fois.

(b) On considère maintenant l'équation différentielle

$$(*) \quad y'' + (1 + \varepsilon(t))y = 0$$

où $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Vérifier que tout solution non-nulle de (*) s'annule une infinité de fois, et montrer que le nombre $N(t)$ de zéros dans l'intervalle $[0, t]$ est équivalent à t/π quand t tend vers $+\infty$.

(c) On revient à l'équation (E), que l'on considère sur $I = [0, +\infty[$. On suppose que $q > 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \sqrt{q(s)} ds = +\infty$$

et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$, où ε est la fonction définie sur I par $\varepsilon(t) = \frac{q'(t)}{2q(t)^{3/2}}$.

i. En faisant le changement de variable $t \mapsto x(t) = \int_0^t \sqrt{q(s)} ds$, montrer que l'équation (E) devient

$$(F) \quad u'' + \tilde{\varepsilon}(x)u' + u = 0$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est à déterminer.

ii. Soit u une solution de (F). Montrer qu'il est possible de faire le changement

$$u(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad u'(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad \text{où } r(t) := \sqrt{u(t)^2 + u'(t)^2}.$$

Quelle est alors l'équation différentielle satisfaite par θ ? En déduire que $\theta(t) \sim t$ quand $t \rightarrow +\infty$ et que le nombre de zéros de u dans $[0, t]$ est équivalent à t/π .

iii. En déduire enfin que le nombre $N(t)$ de zéros d'une solution réelle non-nulle de (E), sous les hypothèses précédentes, vérifie

$$N(t) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^t \sqrt{q(s)} ds.$$

3. On considère le modèle suivant d'évolution de 2 populations: les loups dont le nombre vaut $x(t)$ et les lapins dont le nombre vaut $y(t)$,

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

(a) Calculer la solution du système (E) correspondant à la donnée initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

(b) Vérifier que $x(t) \rightarrow \infty$ et $y(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$, si $x_0 = y_0$, mais $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow 0$, si $x_0 = 2y_0$.

4. (*Système prédateurs-proies: modèle de Volterra-Lotka*)

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. On considère le système différentiel

$$(E) \quad \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

qui est censé modéliser l'évolution du nombre $x(t)$ de proies et $y(t)$ de prédateurs dans un écosystème donné.

(a) Montrer que, sous la condition initiale $x(t_0) = x_0 > 0$ et $y(t_0) = y_0 > 0$, l'équation (E) admet une unique solution maximale $t \mapsto (x(t), y(t))$, qui est définie sur \mathbb{R} entier et qui reste strictement positive, c.à.d. $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) On découpe le premier quadrant en quatre régions: $I =]0, c/d[\times]0, a/b[$, $II =]c/d, +\infty[\times]0, a/b[$, $III =]c/d, +\infty[\times]a/b, +\infty[$, $IV =]0, c/d[\times]a/b, +\infty[$. Montrer qu'une trajectoire issue de la région I passe nécessairement dans II, puis dans III, dans IV et revient dans I.

(c) Montrer que la fonction $F: (x, y) \mapsto dx - c \ln x + by - a \ln y$ est une intégrale première.

(d) En déduire que les trajectoires sont périodiques, et calculer les valeurs moyennes de $x(t)$ et $y(t)$ sur une période $T(x_0, y_0)$.

(e) En utilisant la fonction F, montrer que $T(x_0, y_0) \rightarrow +\infty$ quand $(x_0, y_0) \rightarrow (0, 0)$.