

Licence de Mathématiques
U5a, calcul intégral et équations différentielles

Feuille de TD n° 3

2004

1. (*Lemme de Fatou*) Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré. On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables et on pose

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A_n.$$

- (a) Montrer que $\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- (b) Montrer que $\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ pourvu que $\mu(\cup A_n) < \infty$.
- (c) On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* si $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Montrer que si la suite est croissante (respectivement décroissante) alors elle est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (\text{respectivement} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n).$$

- (d) Si μ est une mesure finie, alors μ vérifie la propriété de continuité, c.à.d. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors on a $\mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

2. On note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = nx(1-x)^n$.
Peut-on écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

3. Calculer la limite, si elle existe, des intégrales

$$\int_0^1 (\cos(1/x))^n dx.$$

4. (*Équi-intégrabilité*) Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et soit \mathcal{F} une famille de fonctions intégrables de X dans \mathbb{R} . On dit que \mathcal{F} est *équi-intégrable* si on a

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq c\}} |f| d\mu \right) = 0.$$

- (a) Montrer que \mathcal{F} est équi-intégrable si et seulement si

$$(i) \sup_{f \in \mathcal{F}} \int |f| d\mu < \infty \quad \text{et} \quad (ii) \lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| d\mu \right) = 0.$$

- (b) Montrer que \mathcal{F} est équi-intégrable si elle est majorée par une fonction intégrable h (c.à.d. si $|f| \leq h$ pour tout $f \in \mathcal{F}$), ou si $\exists p > 1$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int |f|^p d\mu < \infty$.

5. (*Théorème de Vitali*) Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré fini et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge en mesure vers une fonction mesurable f , c.à.d. $\forall \varepsilon > 0$, $\mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Les fonctions f, f_0, f_1, f_2, \dots sont intégrables et $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$;
- (b) La famille $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ est équi-intégrable.

6. (*Théorème d'Egorov*) Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$.

- (a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} qui tend simplement vers 0. Trouver pour tout $i \geq 0$ un entier n_i tel que

$$\mu\{|f_{n_i}| > 2^{-i}\} \leq 2^{-i}.$$

- (b) Montrer que pour tout entier k , la sous-suite $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ trouvée en (a) tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$A(k) = \bigcap_{i \geq k} \{|f_{n_i}| \leq 2^{-i}\}$$

et que cet ensemble $A(k)$ a une mesure qui tend vers $\mu(X)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

7. (*Théorème de Lusin*) Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0, 1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_\varepsilon \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

8. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx) dt$.

- (a) Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- (b) Prouver que f satisfait l'équation différentielle $2f'(x) + x f(x) = 0$.
- (c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

9. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

- (a) Montrer que f est de classe C^1 et que l'on a $f' + g' = 0$.
- (b) Montrer que $f(x) + g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

- (d) En déduire l'égalité $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.