Licence de Mathématiques

U5a, calcul intégral et équations différentielles

Feuille de TD n° 5 | 2004

1. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{M})$ et $f: X \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que
$$\int_X f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\})\,dt = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})\,dt.$$

2. (a) Soit μ_{card} la mesure du cardinal sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et f la fonction définie sur $\mathbb{N}^2$ par
$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n+1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$
Comparer
$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,\mu_{\text{card}}(dm) \right) \mu_{\text{card}}(dn) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,\mu_{\text{card}}(dn) \right) \mu_{\text{card}}(dm).$$
(b) On considère sur $\big([0,1], \mathscr{B}([0,1])\big)$ la mesure de Lebesgue λ et la mesure de comptage μ_{card}. Soit D la diagonale du carré $[0,1]^2$, i.e. $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$.
   i. Vérifier que 1_D est borélienne.
   ii. Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_D\,d\lambda \right) d\mu_{\text{card}}$ et $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_D\,\mu_{\text{card}} \right) d\mu$.

   Les résultats de (a) et (b) sont-ils compatibles avec le théorème de Fubini ?

3. (a) On considère la fonction f définie sur $[-1,1]^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   i. Vérifier que f est borélienne.
   ii. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx \right) dy$.
   iii. En déduire que f n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[-1,1]^2$.

   (b) On considère la fonction g définie sur $[-1,1]^2$ par
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   i. Vérifier que g est borélienne.
   ii. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 g(x,y)\,dy \right) dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 g(x,y)\,dx \right) dy$.
   iii. La fonction g est-elle intégrable sur $[-1,1]^2$.

4. Soient $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable et $F(x) = \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt$. Montrer que, pour $a > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax) - F(x)}{x}\,dx = \ln a \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx.$$

5. (i) En remarquant que $x^{-1} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\,dy$ pour $x > 0$ et en appliquant le théorème de Fubini, montrer que $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe et la calculer.

   (ii) Calculer

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T (\cos ax - \cos bx)\,\frac{dx}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{T\to\infty} \int_0^T (\cos ax - \cos bx)\,\frac{dx}{x} \qquad (a, b > 0).$$

6. (a) Soit $D =]0,\infty[^2$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_D \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dxdy$ et en déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.

   (b) Vérifier que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ et en déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

7. (a) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et strictement positive. Montrer que :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(Ax|x)}\,dx_1dx_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}\,.$$

   (b) En déduire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.