

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités
Devoir à rendre le Vendredi 10 février

1. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurable sur X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$. Montrer que les ensembles

$$A := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\} \quad \text{et} \\ \bar{A} := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe dans } \bar{\mathbb{R}}\} \quad \text{sont } \mathcal{M}\text{-mesurable.}$$

2. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications intégrables de X dans \mathbb{C} et $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable.

(a) Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu = \int |f| d\mu$.

- (b) On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge presque partout vers f .

Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu = \int |f| d\mu$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$.

- (c) Sur l'espace de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ définir une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions λ -intégrables, convergeant simplement vers une application λ -intégrable f telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$, et que la suite $\int |f_n - f| d\mu$ ne tende pas vers 0.

3. Montrer que la *fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et que $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\log t)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Étudier la convergence de la suite

$$I_n(a) := \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{ax} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.