

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités
Devoir à rendre le Vendredi 17 Mars

1. Soit μ une mesure σ -finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction suivante est mesurable :

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, \quad x \mapsto \mu(A + x).$$

2. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace probabilisé et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On note

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) := \mu\{f \leq t\},$$

la *fonction de répartition* de f . Montrer que, pour tout $a \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} [F(t+a) - F(t)] dt = a.$$

3. (*Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan*)

- (a) Montrer qu'une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel réel H est induite par un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si et seulement si $\|\cdot\|$ satisfait l'identité du parallélogramme

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad \forall u, v \in H.$$

Indication : Si $\|\cdot\|$ est une norme satisfaisant l'identité du parallélogramme, poser $\langle u, v \rangle := \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ et montrer en suite que $\langle u+u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ et $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ pour $\alpha = k2^{-\ell}$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{N}$.

- (b) Est-ce-que la norme $\|\cdot\|_1$ sur $L^1([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda_1|_{[0, 1]})$ est induite par un produit scalaire ?

4. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et soit $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. Montrer que

$$L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset L^r(\mu).$$

Indication : Vérifier que $\|u\|_r \leq \|u\|_p^\lambda \cdot \|u\|_q^{1-\lambda} \quad \forall u \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu),$

$$\text{avec } \lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) / \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$